Ziel ETZ | Cíl EÚS
Freistaat Bayern –
Tschechische Republik
Česká republika –
Svobodný stát Bavorsko
2014 – 2020 (INTERREG V)

Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für
regionale Entwicklung
Evropský fond pro
regionální rozvoj

Mathematische Begabung: Modellierung, Diagnose, Förderung

Matematické nadání: Modelování, diagnóza, podpora

Output O.A3.1

Publikation zur Modellierung mathematischer Begabung

Publikace o modelování matematického nadání

Kapitel A, D, E und H aus:

Tom Köcher, Volker Ulm (Hrsg., 2020): Jak rozpoznat a podpořit matematicky nadané žáky a žákyně – Mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler erkennen und fördern, Mathematik-didaktik im Kontext, Heft 5, ISSN 2568-0331

Tom Köcher

A Ein Konzept zur Modellierung mathematischer Begabung

1 Einleitung

„Begabung“ ist aktuell ein viel diskutiertes Feld und gerade Pädagogen begegnet häufig die Bezeichnung des „begabten Kindes“. Doch was ist mit *Begabung* eigentlich genau gemeint? Der Umgang mit der Thematik ist nicht einfach, denn der Begriff *Begabung* selbst ist als theoretisches Konstrukt nicht direkt sichtbar oder gar messbar und daher schwer zu fassen. Auch die Auseinandersetzung mit aktueller pädagogischer, psychologischer und mathematikdidaktischer Literatur zeigt, dass die Auffassungen von *Begabung* durchaus unterschiedlich sind und keine allgemeingültige Begriffsdefinition existiert. Demgemäß bestehen auch unterschiedliche Ansätze, dieses vielschichtige Konstrukt anhand von Modellen und Konzepten zu erklären.

Um sich mit der Thematik von mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern zu befassen, ist es nützlich, sich zunächst mit der Bedeutung des Begriffs *Begabung* auseinanderzusetzen. Dementsprechend werden in diesem Kapitel geläufige Theorien aus der Psychologie und Pädagogik vorgestellt und Erkenntnisse für die Frage nach der Modellierung von *Begabung* zusammengefasst, um daraus einen einheitlichen Grundkonsens für das Begriffsverständnis von *Begabung* vorzuschlagen.

Dabei ist es notwendig, eine Abgrenzung zu Begriffen zu ziehen, welche sehr eng mit dem Kontext *Begabung* verknüpft sind und mitunter auch häufig ähnlich verwendet werden – wie *Intelligenz, Leistung* und *Hochbegabung*.

Auf einem soliden Begriffsverständnis von *Begabung* kann dann ein Modell für *mathematische Begabung* vorgeschlagen werden.

2 Modell des Intelligenzquotienten

Eine sehr populäre Auffassung von Begabung ist das Erreichen eines bestimmten Werts des sogenannten Intelligenzquotienten (IQ), welcher als Maß für die Intelligenz

eines Menschen angesehen werden kann. Dieser IQ wird innerhalb standardisierter Intelligenztests erhoben.

Folgt man dem Intelligenzquotientenmodell für Begabung, so spricht man bei einer Person von einer *Hochbegabung*, wenn diese in einem Intelligenztest einen Intelligenzquotienten von 130 oder mehr erreicht. Dieses Kriterium erfüllen 2% der Bevölkerung. Diese Grenzziehung ist eine statistische Konvention.

Es existieren unterschiedliche Intelligenztests, welche wiederum unterschiedliche Schwerpunkte legen. Hierdurch können sich die Ergebnisse zwischen verschiedenen Intelligenztest und somit die Zuschreibung einer Hochbegabung bei ein und derselben Person durchaus unterscheiden.

In dem personorientierten Ansatz der Begabtenförderung von Weigand et al. (2014) wird auf einen geringen Mehrwert bei der Unterscheidung zwischen den beiden Begriffen *Begabung* und *Hochbegabung* hingewiesen, wenn Schulkultur mit einer Förderung für alle angestrebt wird, egal ob hoch begabt, durchschnittlich begabt oder besonders begabt (vgl. Weigand 2014, S. 44).

Im Nachfolgenden wird somit auf eine quantitative Unterscheidung zwischen *Hochbegabung* und *Begabung* verzichtet und nur der Begriff *Begabung* verwendet.

Zudem kann eine Etikettierung als hochbegabt auch soziale Probleme im Umgang mit der betreffenden Person bergen.

Daher sollte man im schulischen Kontext zwischen den Vor- und Nachteilen abwägen und anhand dieser Gegenüberstellung entscheiden, ob solche Testungen durchgeführt werden.

Wird Begabung wie z. B. bei Rost (2009) als das Vorhandensein einer hohen allgemeinen Intelligenz verstanden, so ergibt sich die Auffassung einer fachspezifischen mathematischen Begabung wie folgt:

> Die vielfältigen Befunde der einschlägigen Literatur lassen keinen Zweifel daran zu, dass mathematische Befähigung und mathematische Leistungen eng mit der Intelligenz und anderen – auch sprachlichen – Schulleistungen verknüpft sind […]. Pollmer […] resümiert kurz und bündig, eine „besondere mathematische Begabung" stelle „lediglich eine besonders hohe intellektuelle Begabung" dar. (Rost 2009, S. 23)

Mathematische Begabung ist nach dieser Auffassung ein Bestandteil allgemein hoher Intelligenz. Sie ist Grundlage für entsprechende sehr gute Schulleistungen.

Nach dem Intelligenzquotientenmodell wird Begabung also mit Intelligenz gleichgesetzt – bzw. mit dem, was mit einem Intelligenztest gemessen und im Intelligenzquotienten quantifiziert wird. Wer intelligent ist, ist begabt und umgekehrt. Diese wechselseitige Zuschreibung ist durchaus diskutabel. Ulm (2009) merkt dahingehend an, dass, wenn man von einem weiten Begabungsbegriff ausgeht, durch die obige Auslegung handwerkliche Begabungen unbeachtet bleiben. Angelehnt an Gardner (2010) könnten hier beispielsweise auch soziale-emotionale (interpersonelle), sportliche oder musische Begabungen angeführt werden, welche keinerlei Berücksichtigung in einer eindimensionalen Definition anhand des IQ finden.

Zudem würde die Zuschreibung einer Begabung durch eine hohe getestete Intelligenz nur einen bestimmten, momentanen „Ausschnitt aus den intellektuellen Fähigkeiten" (Holling et al. 1999, S. 39) der getesteten Person repräsentieren. Hinzu kommt, dass dieser Ausschnitt wesentlich durch das Intelligenzverständnis beziehungsweise das Begabungsverständnis bestimmt ist, welches dem

Test von den Testdesignern zugrunde gelegt worden ist.

Die Kritik, dass durch das Beschreiben von Begabung mittels Intelligenz nur eine ganz bestimmte Facette abgebildet wird, greift auch Käpnick (2013) auf und schreibt: „Die Beschränkung des Begabungsbegriffs auf kognitive Fähigkeiten entspricht nicht seiner Komplexität, wonach sich gemäß heutiger einschlägiger Auffassungen (Begabungs-) Potenziale eines Kindes stets in einem dynamischen Prozess wechselseitiger Beeinflussung von intra- und interpersonalen Katalysatoren entwickeln.“ (Käpnick 2013, S. 12). Hier wird zusätzlich die Kritik deutlich, dass die Reduzierung von Begabung auf die momentane, während des Intelligenztests erbrachte Leistung, der Ansicht von Begabung als ein dynamisches Konstrukt, als ein über die Zeit entwicklungsfähiges Potential nicht gerecht wird. Gerade im schulischen Alltag sollte es eben nicht nur um das Fördern bereits erkannter und diagnostizierter Stärken gehen. Es sollten auch vermuteten und noch nicht gezeigten Begabungen Raum zur Entwicklung gegeben werden (vgl. Weigand 2014, S. 44).

Die Annahme eines multifaktoriellen Begabungsbegriffs führt zu einem weiteren Diskussionspunkt. Den Grad der Ausprägung einer mehrdimensional begriffenen und auf einem komplex zugrunde liegenden Konstrukt abhängiger Faktoren basierenden Begabung mit einer einzigen Zahl – wie dem IQ – zu manifestieren, erscheint unmöglich. Weigand (2014) merkt dahingehend an, dass Begabung als komplexes Konstrukt nicht messbar gemacht werden kann (vgl. Weigand 2014, S. 38–39).

Folgend seien daher einige ausgewählte Theorien und Modelle, welche alle Begabung als ein mehrdimensionales Konstrukt ansehen, vorgestellt.

3 Multiple Intelligenzen nach Gardner

Anstatt von einer allgemeinen Intelligenz auszugehen, weitete der Psychologe Howard Gardner in seiner Theorie über „multiple Intelligenzen“ den Intelligenzbegriff aus. Er geht davon aus, dass Intelligenz ein komplexes, multidimensionales Konstrukt ist und sich in diverse, unter anderem auch nichtkognitive Facetten untergliedern lässt (vgl. Gardner 2013, S. 55 ff.):

- Sprachliche Intelligenz (u. a. Sensibilität für geschriebene und gesprochene Sprache)
- Logisch-abstrakte Intelligenz (u. a. logisch-schlussfolgerndes Bearbeiten von Problemen, Erkennen von Mustern und Strukturen und Umgang damit)
- Räumliche Intelligenz (u. a. Wahrnehmung des Raumes, gedankliches Operieren in räumlichen Situationen)
- Musikalische Intelligenz (u. a. Komponieren von Musik, Spielen eines Instruments)
- Körperlich-kinästhetische Intelligenz (u. a. Koordination von Körperbewegungen)
- interpersonale Intelligenz (u. a. Empathiefähigkeit)
- intrapersonale Intelligenz (u. a. Wahrnehmung eigener Gefühle und angemessener Umgang damit)
- naturalistische Intelligenz (u. a. Erkennen von Phänomenen in der Natur)
- existentielle Intelligenz (Auseinandersetzung mit grundlegenden Fragen des Seins)

In einem seiner Hauptwerke „Abschied vom IQ“ (1991) hinterfragt Gardner daher wie oben angedeutet, inwiefern mit einer einzigen Maßzahl Intelligenz gemessen werden kann. Er schreibt auch, dass Intelligenztests

hauptsächlich nur die ersten drei seiner aufgestellten Intelligenzen messen (vgl. Gardner 1991, S. 9 ff.).

Die „Theorie der multiplen Intelligenzen“ ist nicht unumstritten. Gerade die Fragen nach der Trennschärfe zwischen den verschiedenen Intelligenzen und die Existenz von noch weiteren Intelligenzbereichen sind durchaus begründet. Für die Schule bietet das Modell trotzdem hilfreiche Handlungsentscheidungen; es ermöglicht, Fähigkeiten und Defizite bei Schülerinnen und Schülern differenzierter betrachten zu können.

Folgt man dem Intelligenzbegriff weiter, so ist für die Schule eine wichtige Erkenntnis, dass sich also verschiedene Intelligenzen in einer Person wiederfinden können und somit auch mathematische Begabung aus mehreren dieser Intelligenzen entspringen kann.

Obwohl gerade im Alltag häufig die Begriffe *Intelligenz* und *Begabung* sinngleich verwendet werden, gibt es in der Wissenschaft eine klare Unterscheidung. *Intelligenz* wird allgemein als Begriff verstanden, welcher kognitive Fähigkeiten beschreibt. *Begabung* hingegen wird als theoretisches Konstrukt angesehen, welches das individuelle Potential für gute oder ausgezeichnete Leistungen auf einem oder mehreren Gebieten beschreibt. Nachfolgend seien daher Begabungsmodelle vorgestellt, welche versuchen, die Grundlagen des Konstrukts *Begabung* und der Wechselwirkungen mit anderen Faktoren zu veranschaulichen.

4 Modelle nach Renzulli und Mönks

Joseph S. Renzulli geht davon aus, dass es für Begabung mehr benötigt als nur einen hohen Intelligenzquotienten und hat deshalb sein Drei-Ringe-Modell entwickelt (siehe Abb. 1), bei welchem Begabung aus mehreren Blickwinkeln betrachtet wird (vgl. Renzulli 2005).

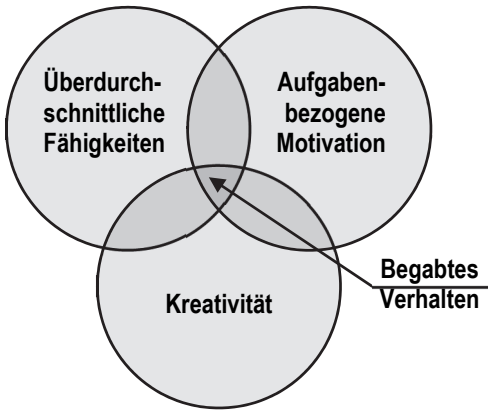


Abb. 1: Drei-Ringe-Modell nach Renzulli

In diesem mehrfaktoriellen Modell werden die Komponenten

- Kreativität,
- aufgabenbezogene Motivation und
- überdurchschnittliche Fähigkeiten

in Abhängigkeit zueinander dargestellt und in Beziehung gesetzt. Als Resultat der Interaktionen der überdurchschnittlich ausgeprägten drei Komponenten kann sich dann „gifted behavior“, also „begabtes Verhalten“, entwickeln. Dieses von Renzulli als Hochleistungsverhalten beschriebene Verhalten ist nicht mit Hochbegabung im Alltagssinn als ein permanenter, gegebener Zustand zu verwechseln. Hochleistungsverhalten ist ein situatives Verhalten, welches sehr eng mit einer ergebnisorientierten Tätigkeit verbunden ist und somit an hohe Leistung gekoppelt ist (vgl. Renzulli 2001, S. 23–24).

Wichtig ist Renzulli dabei herauszustellen, dass keiner der Faktoren allein Hochleistung

bewirken kann, sondern dies erst im Zusammenspiel aller drei möglich wird. Des Weiteren kann zum Beispiel eine herausragende Motivation keine unterdurchschnittlich ausgeprägte Kreativität ausgleichen.

Renzulli stellt weiter fest, dass Kinder und Jugendliche, welche ein Verhalten zeigen, das auf Begabung schließen lässt, eine Vielzahl von Bildungschancen, Ressourcen und Ermutigungen auch außerhalb des regulären Unterrichts benötigen. Darauf aufbauend hat er sein komplexes *Schoolwide Enrichment Model* zur Förderung begabter Schülerinnen und Schüler entwickelt (vgl. Renzulli 2005).

Das Triadische Interdependenzmodell des niederländischen Begabungsforschers Franz Mönks (vgl. Mönks 1992) nimmt auf das Drei-Ringe Modell direkten Bezug und erweitert dieses um das soziale Umfeld, in dem Begabte heranwachsen. Dies wird von Familie, Freunden und Schule repräsentiert (siehe Abb. 2).

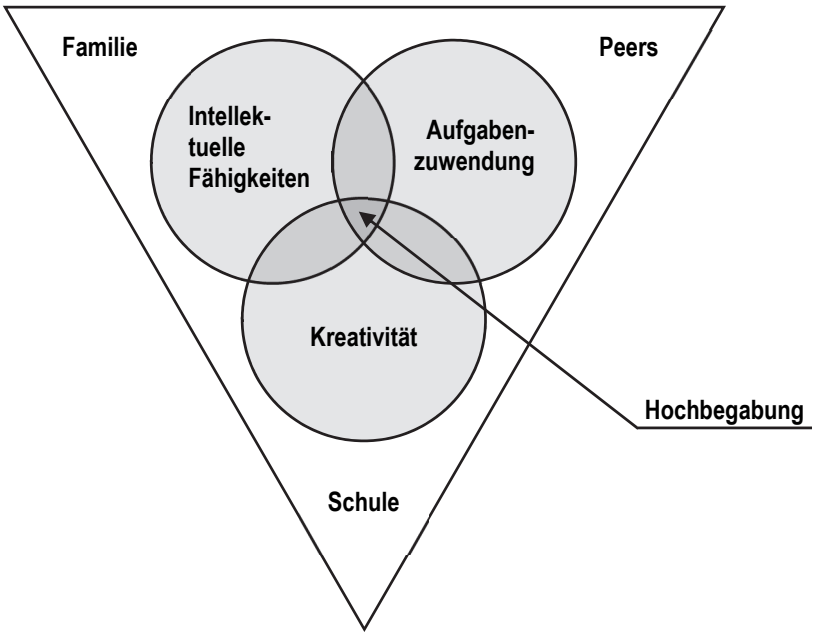


Abb. 2: Triadisches Interdependenzmodell nach Mönks

Wie bei Renzulli wird hier graphisch mit den gleichen drei Persönlichkeitsmerkmalen dargestellt, unter welchen Bedingungen sich Begabung entwickeln kann. Zusätzlich zu den bereits vorhandenen drei Ringen bedarf es nach Mönks aber noch einer begabungsförderlichen Umgebung. Durch das erfolgreiche Zusammenwirken der drei Persönlichkeitsmerkmale und der Umwelt kann eine Begabungsentwicklung schlussendlich gelingen. Diese wechselseitige Abhängigkeit der drei inneren und drei äußeren Faktoren, *Triaden*, wird als *Interdependenz* bezeichnet.

Jedoch bleibt in dem Modell unklar, inwiefern genau die inneren Ringe untereinander interagieren und wie sie voneinander abzugrenzen sind. Zudem bleibt ungeklärt, wie die Ringe mit dem äußeren Dreieck in Verbindung stehen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass beide Modelle den Einzelnen und dessen Entwicklung in den Mittelpunkt stellen und das Modell von Mönks einen dynamischen Prozess zwischen den anlagebedingten Personenmerkmalen und äußeren Einflussfaktoren beschreibt (vgl. Bardy 2013, S. 19–20).

5 Modell nach Heller

Den Punkt, dass Begabung einem komplexen und dynamischen Wirkprozess unterliegt, griff auch der Psychologe Kurt A. Heller auf. Er entwickelte das in Abb. 3 dargestellte Modell (vgl. Heller 2001), in welchem er zwischen intrapersonellen Begabungsfaktoren (links in der Grafik) und Leistungsbereichen (rechts in der Grafik) differenziert, welche von Moderatorfaktoren, der Umwelt (unten in der Grafik) und nicht-kognitiven, persönlichkeitsbedingenden Merkmalen (oben in der Grafik) beeinflusst werden.

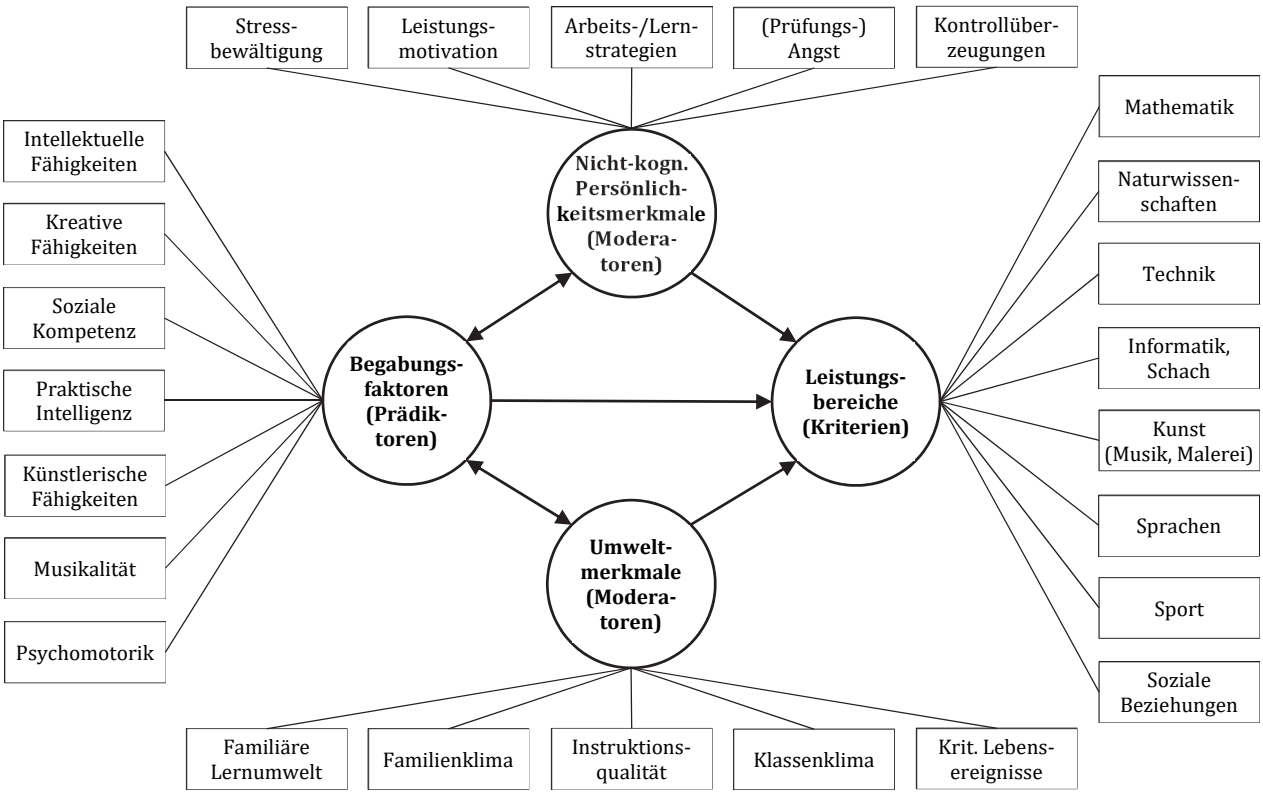


Abb. 3: Münchener (Hoch-)Begabungsmodell von Kurt Heller

Heller stellt den Prozesscharakter der Begabungsentwicklung in den Fokus. Durch die Abhängigkeit der Begabungsentwicklung von verschiedenen äußeren Faktoren über die Lebensspanne hinweg wird der stetige Entwicklungsprozess erkennbar.

Zentrales Merkmal dieses Modells ist hierbei jedoch die Unterscheidung von Begabung und Leistung. Inwiefern sich Begabungsfaktoren in messbare und sichtbare Leistungen, auch Performanz genannt, niederschlagen, hängt sowohl von den individuellen Persönlichkeitsmerkmalen als auch von den Umweltfaktoren ab. Daher eignet sich dieses Modell, um aufzuzeigen, welche Vielfalt an Faktoren und Einflussbereichen zusammenspielen müssen, damit aus einer hohen Begabung auch eine vergleichbare Leistung entspringen kann.

Resümierend ist Begabung also an sich bereichsspezifisch und unterliegt einer dynamischen Entwicklung, da fachspezifische sowie fachübergreifende Einflüsse prozesshaft über die Lebensspanne hinweg berücksichtigt werden müssen.

Für die Modellbildung von Begabungen lässt sich konstatieren, dieselben nicht als gegebene statische Phänomene anzusehen. Begabungen können im Laufe der Biographie eines Menschen auftreten, sich weiterentwickeln und ausdifferenzieren, aber auch wieder verschwinden.

Somit kann geschlossen werden:

> *Begabung ist im weitesten Sinne ein individuelles Potential für gute oder ausgezeichnete Leistungen auf einem oder mehreren Gebieten.*

6 Fachspezifisches Modell mathematischer Begabung

Auf Grundlage dieses allgemeinen Begabungsverständnisses kann man den Begriff der *mathematischen Begabung* schärfen. Hierbei kann die inhaltliche Beschreibung des Begriffs der *mathematischen Kompetenzen* laut den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (vgl. Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister) beziehungsweise laut den kompetenzorientierten Lehrplänen der Bundesländer berücksichtigt werden (vgl. z. B. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB)).

Im Kompetenzstrukturmodell des LehrplanPLUS für Bayern ist beispielhaft zu sehen, welche mathematischen Kompetenzen von den Schülerinnen und Schülern während ihrer Schulzeit erworben werden sollen (vgl. Abb. 4). Dieses fachbezogene Kompetenzmodell unterscheidet mathematische Kompetenzen in zwei Bereichen:

- *Inhaltsbezogene Kompetenzen* beziehen sich auf die Beschäftigung mit mathematischen Inhalten in den Bereichen Algorithmus und Zahl, Messen, Raum und Form, funktionaler Zusammenhang sowie Daten und Zufall.
- *Prozessbezogene Kompetenzen* lassen sich durch Modellieren, Problemlösen, Argumentieren, Kommunizieren, Verwenden von Darstellungen sowie Umgehen mit symbolischen Elementen als typische Arten mathematischen Tätigseins beschreiben.

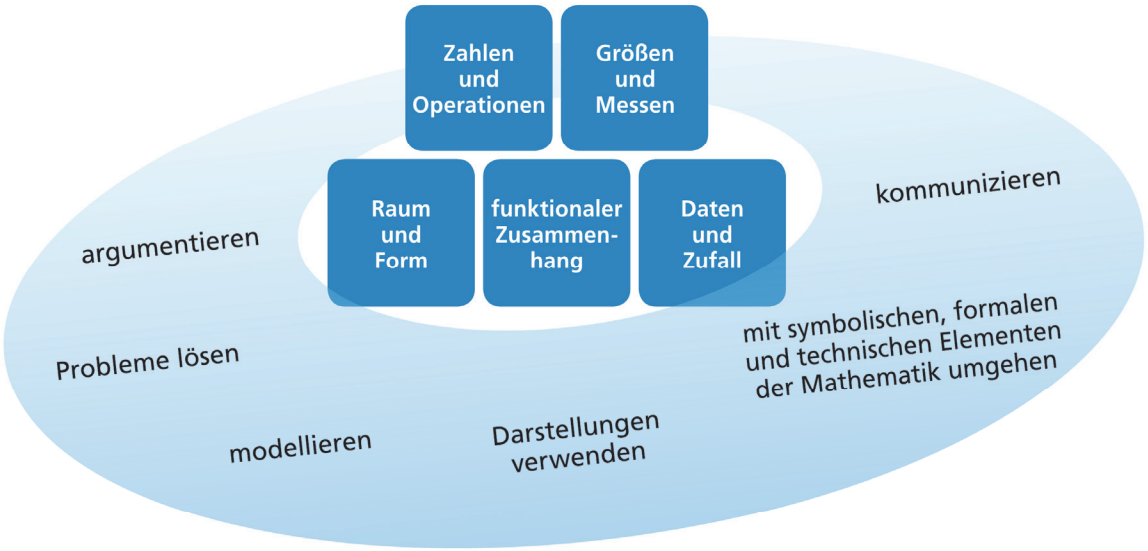


Abb. 4: Kompetenzstrukturmodell nach dem LehrplanPLUS Gymnasium Mathematik

Eine genauere Beschreibung bezüglich welcher mathematischer Themen mit welcher Tiefe diese Aneignung geschehen soll, ist in den KMK-Bildungsstandards näher ausgeführt (vgl. Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister).

Mit Hilfe dieses Kompetenzmodells ergibt sich folgender Vorschlag einer Definition von mathematischer Begabung:

> *Mathematische Begabung ist das individuelle Potential zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen.*

Die Bedeutung des Begriffs *mathematische Begabung* wird noch deutlicher, wenn man sich die einzelnen Aspekte der vorgeschlagenen Definition näher anschaut:

- *Begabung als Potential:* Mathematische Begabung ist ein Potential. Allein das Vorhandensein eines gewissen Potentials zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen ist kein hinreichender Faktor dafür, dass auch eine solch entwickelte Kompetenz vorliegt beziehungsweise muss das vorliegende Potential nicht zwingend dazu führen, dass sich eine Kompetenz daraus entwickelt. Gründe könnten hierfür das Fehlen einer passenden Anregung durch die Umwelt sein.
- *Fachspezifik von Begabung*: Mathematische Begabung ist ein bereichsspezifisches Konstrukt. Über den Begriff der mathematischen Kompetenzen ist es eng an Mathematik gekoppelt.
- *Komplexität von Begabung*: Die Vielschichtigkeit und Fülle von Mathematik spiegelt sich in der Komplexität des Kompetenzmodells der KMK-Bildungsstandards wider und überträgt sich damit auf den Begabungsbegriff. Beispielsweise kann man dadurch differenziert bereichsspezifisch von mathematischer Begabung in verschiedenen Gebieten der Mathematik (wie Geometrie, Algebra, Stochastik) oder für mathematische Prozesse (wie Modellieren, Problemlösen, Argumentieren) sprechen.

- *Begabung als individuelle Personeneigenschaft*: Die Ansicht, dass Begabung als individuell angesehen wird, führt zu zwei Folgeaspekten: Zum einen besitzt jede Person ein gewisses Potential zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen und damit auch eine gewisse Begabung. Zum anderen ist mathematische Begabung individuell ausgeprägt, d. h. Menschen unterscheiden sich in ihrem individuellen Potential, mathematische Kompetenzen zu entwickeln. Mathematisch besonders Begabte zeichnen sich dadurch aus, dass dieses Potential in vielen Facetten deutlich überdurchschnittlich ausgeprägt ist.

Auf diesem Verständnis von mathematischer Begabung baut das im Folgenden vorgestellte fachspezifische Modell zur Entwicklung von Begabung, Kompetenzen und Leistung nach Ulm und Zehnder (2020) auf. Im Modell in Abb. 5 ist die Gesamtheit aller Personeneigenschaften (außer mathematischer Begabung und mathematischen Kompetenzen) und aller Umweltfaktoren jeweils mit einem langgezogenen Rechteck symbolisiert. Die Pfeile illustrieren vielfältige Wechselwirkungen.

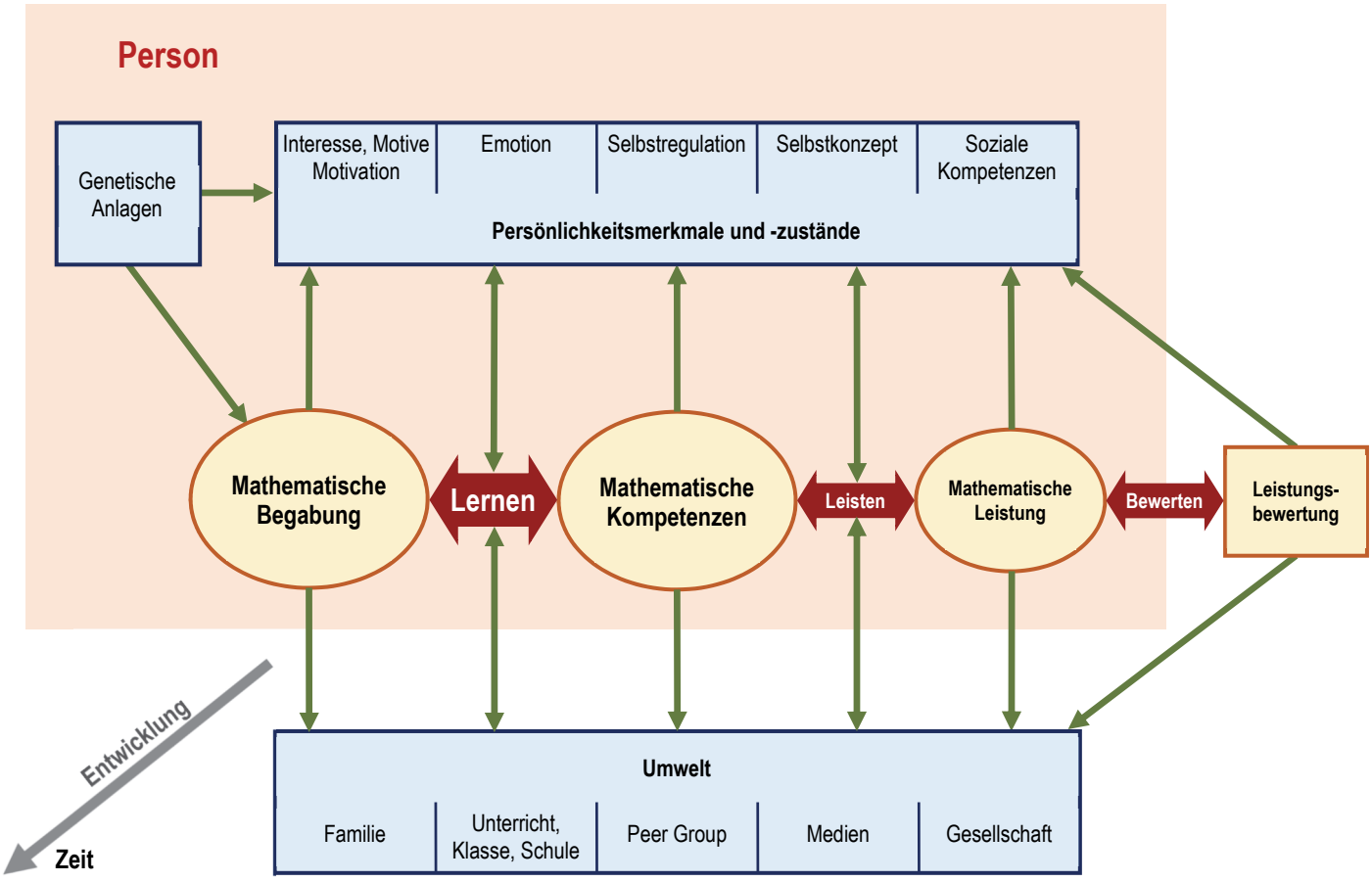


Abb. 5: Modell zur Entwicklung mathematischer Begabung, Kompetenzen und Leistung nach Ulm und Zehnder (2020)

Lernen wird in dem Modell als der zentrale Prozess für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen angesehen. Der Erwerb solcher Kompetenzen erfolgt durch die geistige Beschäftigung mit mathematischen Inhalten. Die dabei stattfindenden Lernprozesse im Kopf der Person können dann zu einer (Wei-

ter-)Entwicklung mathematischer Kompetenzen führen. Basis dieses Lernens ist die individuelle mathematische Begabung – das Potential zur Kompetenzentwicklung.

Im Modell erfolgt die Entwicklung mathematischer Begabung, wie oben schon angedeutet, gleichzeitig zur natürlich-biologischen, genetisch bedingten Entwicklung des Gehirns und der Person selbst. Zusätzlich spielt aber auch das individuelle Lernen eine tragende Rolle. Bei der Entwicklung mathematischer Kompetenzen mit Hilfe von Lernprozessen werden durch das Lernen neuronale Veränderungen im Gehirn ausgelöst, welche wiederum das individuelle Potential zur Kompetenzentwicklung und somit die mathematische Begabung beeinflussen und steigern können. Ebenso kann sich aber dieses vorhandene Potential auch im Laufe des Lebens verringern, wenn keine entsprechenden Lernprozesse stattfinden. Ein plastisches Beispiel: Ein Kind beziehungsweise ein Jugendlicher mag etwa ein hohes Potential zum Erlernen einer (Fremd-)Sprache, zum Spielen eines Musikinstruments oder zu mathematischem Denken besitzen. Wenn entsprechendes Lernen nicht stattfindet, reduziert sich dieses Potential im Lauf des Lebens.

Begabung wird, wie auch bei Weigand et al. (2014), als ein im Lauf des Lebens veränderbares Konstrukt angesehen. Es entwickelt sich dynamisch durch das Zusammenwirken der verschiedenen Einflussfaktoren.

Mathematische Begabung und Kompetenzen können zwar nicht unmittelbar, jedoch aber indirekt durch den Lernprozess von allgemeinen Persönlichkeitseigenschaften und der Umwelt beeinflusst werden. Diese stehen in einem komplexen Wirkgeflecht zueinander in Verbindung.

Personeneigenschaften bezeichnen zum einen zeitlich relativ stabile Merkmale der Person. Darunter fallen zum Beispiel Motive, Fähigkeiten zur Selbstregulation, generelle Interessen, das Selbstkonzept und soziale Kompetenzen. Zum anderen sind zeitlich kurzfristig variable Zustände der Person eingeschlossen, wie etwa die aktuelle Motivation für die konkrete Tätigkeit oder entstehende Emotionen innerhalb der aktuellen Situation. Diese Vielfalt an Eigenschaften einer Person hat Auswirkungen, in welcher Art und in welchem Umfang sich die Person mit Mathematik beschäftigt und sich dadurch mathematische Kompetenzen und mathematische Begabung entwickeln.

Die Umwelt, in der sich eine Person befindet, nimmt auch entscheidenden Einfluss auf die Entwicklung mathematischer Begabung und Kompetenzen durch das Lernen. Bestandteile der Lebensumwelt von Kindern und Jugendlichen sind insbesondere die Familie, die Schule, die Peergroup sowie die Medien und unsere Gesellschaft als Ganzes. Wenn in der Umwelt der Person entsprechende Lernsituationen und Anreize auftreten, lernförderliche Unterstützung und Wertschätzung vorherrscht und die Person sozial eingebunden ist, so kann dies sich förderlich auf das mathematische Lernen auswirken. Diese Faktoren sind maßgeblich dafür, ob und wie intensiv sich ein Kind oder Jugendlicher mit Mathematik nicht nur in, sondern auch außerhalb der Schule befasst.

Zudem basieren Begabung im Allgemein sowie mathematische Begabung im Speziellen auch in diesem Modell auf den genetischen Anlagen.

Mathematische Leistung wiederum kann auf der Basis mathematischer Kompetenzen erbracht werden, indem diese genutzt werden, um ein bestimmtes Ergebnis zu erzielen. Die Leistung ergibt sich also aus der Anwendung von Kompetenzen innerhalb mathematikhaltiger Situationen und wird sichtbar. Zugehörige Prozesse des Leistens werden dabei, wie

auch Lernprozesse, von außen durch Umweltfaktoren und von innen durch Persönlichkeitseigenschaften beeinflusst.

Auch Friedhelm Käpnick fasst das theoretische Konstrukt *mathematische Begabung,* vor allem bezogen auf das Grundschulalter, als ein „individuell geprägtes bereichsspezifisches Potential für eine mit großer Wahrscheinlichkeit im Jugend- und Erwachsenenalter entfaltete überdurchschnittliche mathematische Leistungsfähigkeit auf." (Käpnick et al. 2005, S. 22).

Auch Käpnick betrachtet mathematische Begabung als bereichsspezifisch. Ihre Entwicklung wird von äußeren Faktoren und Persönlichkeitseigenschaften beeinflusst. Begabung und Leistung werden unterschieden: auf der Basis von Begabung kann eine Person Leistung zeigen.

Der hohe Stellenwert der Prozesse des Lernens innerhalb des vorgestellten mathematikspezifischen Begabungsmodells von Ulm und Zehnder (2020) findet sich auch bei Weinert (2000): „Lernen ist der entscheidende Mechanismus bei der Transformation (hoher) Begabung in (exzellente) Leistung." (Weinert 2000). Dadurch wird zusätzlich ersichtlich, dass hohe Begabung nicht immer hohe Leistung implizieren muss.

Als weiterführende Literatur findet sich eine ausführlichere Betrachtung des Themenkomplexes „Mathematische Begabung, Kompetenzen, Leistung" bei Ulm und Zehnder (2020).

7 Zusammenfassung

Abschließend werden die dieser Publikation zu Grunde liegenden Verständnisse von *Intelligenz, Hochbegabung, Begabung* und *mathematischer Begabung* nochmals zusammengefasst.

Intelligenz ist das, was mit dem einem Intelligenztest gemessen und im Intelligenzquotienten ausgedrückt wird.

Begabung kann man nach Heller (1996) allgemein als ein „individuelles, relativ stabiles und überdauerndes Fähigkeits- und Handlungspotenzial auffassen, bestehend aus kognitiven, emotionalen, kreativen und motivationalen Bestandteilen, die durch bestimmte Einflüsse weiter ausgeprägt werden können und so eine Person in die Lage versetzen, in einem mehr oder weniger eng umschriebenen Bereich besondere Leistungen zu erbringen." (Heller 1996, S. 12)

Von *Hochbegabung* wird im Zusammenhang mit Intelligenztests gesprochen, um Personen mit besonders hoher Intelligenz (z. B. mit einem IQ größer oder gleich 130) zu kennzeichnen. Wenn man aber – wie im vorliegenden Text – ein mehrschichtiges Begabungsverständnis vertritt, sind die Verwendung des Begriffs *Hochbegabung* und die Unterscheidung zu *Begabung* nicht erforderlich.

Mathematische Begabung ist das individuelle Potential zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen.

Literaturverzeichnis

Bardy, Peter (2013): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primar- und Sekundarstufe I + II).

Gardner, Howard (1991): Abschied vom IQ. Die Rahmentheorie der vielfachen Intelligenzen. Stuttgart: Klett-Cotta.

Gardner, Howard (2010): The Theory of Multiple Intelligences. http://www.pz.harvard.edu/sites/default/files/Theory%20of%20MI.pdf.

Gardner, Howard (2013): Intelligenzen. Die Vielfalt des menschlichen Geistes. Stuttgart: Klett-Cotta.

Heller, Kurt A. (1996): Begabtenförderung – (k)ein Thema in der Grundschule? *Grundschule* 28 (5), 12–14.

Heller, Kurt A. (Hg.) (2001): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter. Göttingen: Hogrefe.

Holling, Heinz; Kanning, Uwe Peter; Wittmann, Anna Julia; Preckel, Franzis (1999): Hochbegabung. Forschungsergebnisse und Fördermöglichkeiten. Göttingen: Hogrefe.

Käpnick, Friedhelm (2013): Theorieansätze zur Kennzeichnung des Konstruktes „Mathematische Begabung" im Wandel der Zeit. In: Torsten Fritzlar und Friedhelm Käpnick (Hg.): Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven. Münster: WTM Verlag, 9–40.

Käpnick, Friedhelm; Nolte, Marianne; Walther, Gerd (2005): Talente entdecken und unterstützen. Beschreibung des Mathematikmoduls G5. Kiel: IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

Mönks, Franz. J. (1992): Ein interaktionales Modell der Hochbegabung. In: Ernst A. Hany (Hg.): Begabung und Hochbegabung. Theoretische Konzepte – empirische Befunde – praktische Konsequenzen. Bern, Göttingen, Toronto, Seattle: Huber, 17–22.

Renzulli, Joseph S. (2001): Das schulische Enrichment Modell SEM. Aarau: Sauerländer.

Renzulli, Joseph S. (2005): The Three-Ring Conception of Giftedness: A Developmental Model for Promoting Creative Productivity. In: Robert J. Sternberg und Janet E. Davidson (Hg.): Conceptions of giftedness. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 246–279.

Rost, Detlef H. (2009): Grundlagen, Fragestellungen, Methode. In: Detlef H. Rost (Hg.): Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. Befunde aus dem Marburger Hochbegabtenprojekt. Münster: Waxmann (Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie, 72), 1–91.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister: Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf.

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB): LehrplanPLUS – Gymnasium – Mathematik – Fachprofile. https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/gymnasium/mathematik.

Ulm, Volker (2009): Auch Begabte brauchen Förderung – Ansätze für das Fach Mathematik. Schriftenreihe zum Kolloquium Mathematik-Didaktik. Universität Eichstätt, 100/1–100/11.

Ulm, Volker; Zehnder, Moritz (2020): Mathematische Begabung in der Sekundarstufe. Modellierung, Diagnostik, Förderung. Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

Weigand, Gabriele (2014): Begabung oder Hochbegabung? In: Gabriele Weigand, Armin Hackl, Victor Müller-Oppliger und Günter Schmid (Hg.): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz, 37–46.

Weigand, Gabriele; Hackl, Armin; Müller-Oppliger, Victor; Schmid, Günter (Hg.) (2014): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz. http://content-select.com/index.php?id=bib_view&ean=9783407293718.

Weinert, Franz Emanuel (2000): Lernen als Brücke zwischen hoher Begabung und exzellenter Leistung. 2. internationale Salzburger Konferenz zu Begabungsfragen und Begabtenförderung. Salzburg, 13.10.2000.

Michala Plassová

D Ein Modell mathematischer Begabung

1 Einleitung

Es ist entscheidend, das Potential eines Individuums zu erkennen, um auf dieser Basis Methoden zur Förderung seiner Begabung zu entwickeln. Zunächst gilt es allerdings, den Begriff der Begabung zu schärfen und ihn zu Begriffen wie *Talent*, *Potential* und *Veranlagung* in Bezug zu setzen bzw. von diesen abzugrenzen. In den 1930er Jahren wurde die Fachwelt von der Arbeit von Lewis Terman (1925) stark beeinflusst, der als Autor des Stanford-Binet-Intelligenztests diesen Test als Instrument zum Erkennen von Begabten anwendete, wobei als begabt derjenige galt, der mehr als 130 Intelligenzpunkte erreichte (Pfeiffer 2008). Allerdings ist es angebracht, zu betonen, dass zu dieser Zeit der Stanford-Binet-Test vor allem den sogenannten Spearman'schen (1927) „g-Faktor der Intelligenz" widerspiegelte. Von dieser Intelligenz wird angenommen, dass sie allgemein, angeboren und in einem gewissen Maße erblich ist. Dies steht in einem gewissen Spannungsfeld zu Theorien über spezifische Intelligenzen oder kristalliner Intelligenz nach Cattell (1971) – ganz zu schweigen von komplexen Intelligenztheorien wie Gardners Theorie der multiplen Intelligenzen (2018).

Dieses Spannungsfeld wurde von Paul Witty (1958) in seiner Definition elegant aufgelöst; diese wird im Folgenden nach einer kurzen Beschreibung seiner Arbeit vorgestellt. Bis in die 1980er Jahre hinein gehörten seine Publikationen zur dominierenden Literatur innerhalb des Themenfeldes der Begabung.

Die Arbeiten von Paul Witty und Martin D. Jenkins befassten sich mit der Rolle des kulturellen Milieus, der ethnischen Zugehörigkeit und der Rasse von jüngeren schulpflichtigen Kindern in Bezug auf deren gemessene Intelligenz (Pfeiffer 2008).

Von Witty stammt folgende bekannte Definition eines begabten Kindes:

„*Begabt oder talentiert ist ein Kind, dessen Leistungen in jedem potentiell wertvollen Bereich seiner Aktivität durchweg bemerkenswert sind.*" (1965, in Laznibatová 2007, S. 63).

Diese Übersetzung einer Definition von Witty ist ein Beispiel dafür, dass viele Autoren die Begriffe *Begabung* und *Talent* als Synonyme wahrnehmen. Laznibatová (2007) gibt an, dass, wenn in der Literatur zwischen diesen Begriffen unterschieden wird, *Talent* als Realisierungsgrad von *Begabung* angesehen wird.

Um konsistent zu bleiben, widmen wir uns dem Original der Definition von Witty von 1958, in dem es heißt:

> There are children whose outstanding **Potentialities** in art, in writing, or in social leadership can be recognized largely by their performance. Hence, we have recommended that the definition of **giftedness** be expanded and that we consider any child gifted whose performance in a potentially **valuable** line of human activity is consistently remarkable. (Witty 1958, S. 62)

Begabung wird als Resultat eines dynamischen Prozesses gesehen, in dem sich die erblich bedingten Veranlagungen im jeweiligen Umfeld gestalten und formen, in dem sich die begabte Person befindet und bildet. Dabei versteht man unter der Umwelt nicht nur die physische, sondern auch die soziale, ökonomische, psychologische und spirituelle Umgebung.

Es ist interessant, dass Witty (siehe oben) die Wörter *Potential* und *Begabung* als semantische Synonyme verwendet. Somit befreit er den Begriff *Begabung* von seiner lediglich hereditären Natur und eröffnet die Diskussion über die kontinuierliche Entwicklung von Begabung in der Umwelt. So nehmen wir Begabung nicht mehr als einen vollendeten Zustand, sondern als einen lebenslangen Prozess der Gestaltung und Erfüllung der Potentiale eines Einzelnen war.

2 Allgemeines Modell der Begabung

Ein allgemeines Modell der Begabung ist in Abb. 1 entworfen:

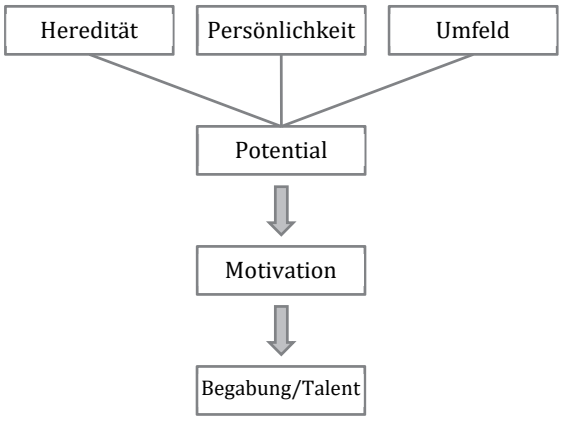


Abb. 1: Allgemeines Begabungsmodell

Hier werden die grundlegenden Variablen vorgeschlagen, die den Entwicklungsprozess der Begabung beeinflussen. Bei der Bestimmung dieser Variablen wurde unter Anwendung der Schlüsselworte „mathematische Begabung“ und „mathematische Leistung“ eine Recherche der verfügbaren Fachliteratur in der Datenbank „ScienceDirect“ vorgenommen. Zugleich wurden lediglich Artikel aus den letzten fünf Jahren berücksichtigt und unter dem Gesichtspunkt ihrer Relevanz für das vorliegende Thema verglichen. Allerdings könnte man mit der Recherche schon in der Epoche des antiken Griechenlands beginnen, da das Konzept von individuellen Unterschieden bereits zum Beispiel in Platons Arbeit (Anastasi, 1958) sowie bei einer Vielzahl weiterer Autoren zu finden ist (z. B. Locke 1692; Galton 1869; Galton 1886; Galton 1892). Aus wissenschaftlichen Arbeiten beeinflussen uns auch klassische Studien aus dem vergangenen Jahrhundert (z. B. Horst 1941; Bennett, Seashore & Wesman 1952; Cronbach 1957; Becker 1970; Taylor 1973; Dočkal 1987). Bei gegenwärtigen Arbeiten befassen wir uns insbesondere mit denen,

die sich mit Begabung im Bereich der Mathematik beschäftigen (z. B. Dehaene, Molko, Cohen et al. 2004; Geary 2004; Vinkhuyzen et al. 2009; Baron-Cohen et al. 2014; Davis et al. 2015).

3 Modell mathematischer Begabung

Eine sehr hochwertige, aber auch bisweilen in Vergessenheit geratene Recherche präsentiert Taylor (1973) in ihrer Dissertationsarbeit zum Thema von Faktoren für mathematische Begabung. Sie erfasst insbesondere Studien zur Korrelation zwischen verschiedenen Faktoren und ihren prädiktiven Wert für mathematischen Erfolg. Zu diesen Grundfaktoren gehören:

- Intelligenz und Differenzierungsfähigkeiten,
- Persönlichkeit,
- Interesse an Mathematik,
- Leseniveau,
- Fähigkeit zum Problemlösen,
- sozioökonomischer Status,
- Geschlecht.

An diese Arbeit knüpft Johnson (1976) an, der zu den wichtigen Faktoren die *Einstellung zur Mathematik* hinzufügt.

Mit dem prädiktiven Wert verschiedener Faktoren oder Variablen im Bereich der mathematischen Begabung befassen sich in der gegenwärtigen Fachliteratur beispielsweise Peng und Lin (2019); Chow, Ekholm (2019); Gladstone et al. (2018); Morosanova et al. (2016); Mercader (2018), Gimbert et al. (2019).

Kehren wir nun zu unserem Modell zurück, um einzelne Begriffe und deren Inhalte zu erläutern.

Heredität

Unter Heredität verstehen wir Erblichkeit oder besser gesagt hier den Einfluss der Vererbung auf die mathematische Begabung. Heredität korreliert nach Warrier und Baron-Cohen (2016) mit der mathematischen Begabung in einer Spanne von 0,2 bis 0,9, was freilich eine recht vage Angabe ist. Cerda et al. (2015) zum Beispiel hat an einer Stichprobe (N = 634) chilenischer Grundschulkinder den Early Numeracy Test durchgeführt und seine Probanden im Laufe weiterer vier Jahre beobachtet. Er stellte fest, dass der prädiktive Wert des erwähnten Tests ungefähr 64 % beträgt. Dieser Test beruht, wie seine Bezeichnung andeutet, auf der Numerosität. Die Numerosität ist ein evolutionär entwickelter Mechanismus, der bereits bei Säuglingen anzutreffen ist (z. B. Starkey & Cooper 1980; Feigenson et al. 2004; Izard et al. 2009) und uns rudimentäre arithmetische Rechenoperationen ermöglicht (Plassová 2017). Aber auch beim Test der frühen Rechenfähigkeiten werden wir das alte Problem *nature vs. nurture* (*Natur vs. Erziehung*) nicht los – insbesondere dann, wenn wir sämtliche Variablen in Betracht nehmen, die in diesem Test ihren Einfluss auf das Ergebnis ausüben. Exakt mit dieser Problematik befasst sich Mercader et al. (2018, siehe unten).

Einer der erwähnenswerten Bestandteile der Heredität ist das Geschlecht. Diesem Aspekt schenken zahlreiche Studien Aufmerksamkeit (z. B. Haworth et al. 2007; Markowitz et al. 2005; Vinkhuyzen et al. 2009; Lindberg et al. 2010; Stoet and Geary 2013; Cerda et al. 2014). Warrier und Baron-Cohen (2016) geben an, dass moderne molekulare Genetikstudien dem Einfluss des Geschlechts auf mathematische Begabung keine große Rolle zusprechen, obwohl mathematische Begabung historisch mit dem männlichen Geschlecht verbunden wird. Sie heben vielmehr soziologische Faktoren hervor.

Exekutive Funktionen

Die exekutiven Funktionen gehören in unserem Modell zu dem Bestandteil, der eine Schnittmenge aus Heredität, Persönlichkeit, Umfeld und Motivation darstellt. Mercader et al. (2018) betonen die Notwendigkeit eines multifaktoriellen Ansatzes und der Beachtung insbesondere dieser drei Variablen: *frühe Rechenfähigkeiten, exekutive Funktionen* und *Motivation*. Da wir die Rechenfähigkeiten bereits erwähnt haben, wenden wir uns den *exekutiven Funktionen* zu. Hierunter verstehen wir steuernde Funktionen, die die kognitiven Prozesse während der Lösung von Aufgaben regulieren.

Es gibt selbstverständlich sehr viele solcher Funktionen und dennoch existieren zwei, die unter dem Gesichtspunkt ihres Einflusses auf mathematische Begabung als die wichtigsten (Diamond, 2013) gelten. Dies sind das *Arbeitsgedächtnis* und die *Inhibition*.

Mercader (2018) gibt an, dass die Inhibition einen signifikanten Einfluss auf mathematische Begabung während der frühen Entwicklungsstadien von Kindern zeigt. Allerdings sind die Ergebnisse nicht immer stabil und es existieren auch Studien (z. B. Censabella and Noël 2008), die diese Beziehung nicht bestätigen. Unserer Ansicht nach bestehen wichtige Unterschiede dahingehend, welches Konstrukt der Inhibition die jeweiligen Studien anwenden (z. B. Censabella & Noël 2004; Friedman & Miyake 2004; Blair and Razza 2007; Bull et al. 2008; Lan et al. 2011). Es muss berücksichtigt werden, dass die erwähnten Studien mit Inhibition nicht auf dem Gebiet neuronaler Netze arbeiten und dass die Tests nur behavioral durchgeführt werden.

Pengs et al. (2015) Metaanalyse zeigt eine Korrelation (r = 0,35) zwischen mathematischer Begabung und dem Arbeitsgedächtnis. Hier bestehen allerdings Unterschiede in Bezug auf die mathematische Domäne. So ist die Korrelation höher bei Berechnungen als bei Aufgabenlösung in der Geometrie (Peng, et al., 2015; Mercader, et al., 2018).

Motivation

Laut Mercader (2018) ist das Ausmaß der Kompetenz, die der Einzelne sich selbst zuschreibt, der entscheidende Motivationsfaktor – und zwar dahingehend, dass jene Menschen, die an ihren Erfolg glauben, mehr Fleiß und Mühe an den Tag legen und beharrlicher arbeiten, als jene, die ihre Kompetenzen als unterdurchschnittlich betrachten. Das hat im Grunde genommen bereits Julian Rotter in seiner Theorie der *Lokation der Kontrolle* (locus of control, LOC) (1966) beschrieben, als er die sog. Attributionsstile in internale und externale Kontrolle einteilte. Internalisten suchen bei der Erklärung von Ereignissen nach inneren Ursachen und sind der Meinung, dass ihr Erfolg metaphorisch gesagt in ihren Händen liegt. Externalisten schreiben die Ursachen für den Erfolg und den Misserfolg äußeren Umständen zu. Auch im Allgemeinen haben sie das Gefühl, ihr eigenes Leben nicht unter Kontrolle zu haben. In der bereits klassisch gewordenen Studie von Rodin und Langer (1977) wurde Internalismus als die vorteilhaftere Attributionshaltung bezeichnet, da Internalisten in der Regel gesünder, zufriedener und erfolgreicher sind.

Literaturverzeichnis

Anastasi, A. (1958): Differential psychology: Individual and group differences in behavior. New York: Macmillan, vol. 3.

Baron-Cohen S., Murphy L, Chakrabarti B, et al. (2014): A genome wide association study of mathematical ability reveals an association at chromosome 3q29, a locus associated with autism and learning difficulties: a preliminary study. PloS One 9 (5): e96374.

Becker, J. P. (1970): Research in mathematics education: The role of theory and of aptitude-treatment-interaction. Journal for Research in Mathematics Education, 1, 19-28.

Bennett, G. K., Seashore, H. G., Wesman, A. G. (1952): A manual for the Differential Aptitude Tests. New York: The Psychological Corp.

Cattell, R. (1971): Abilities: their structure, growth, and action. (xxii, 583 p.) Boston: Houghton Mifflin.

Censabella, S., Noël, M. P. (2008): The inhibition capacities of children with mathematical disabilities. Child Neuropsychol. 14, 1–20. doi: 10.1080/09297040601052318

Cerda, G., Pérez, C., Navarro, J. I., Aguilar, M., Casas, J. A., Aragón, E. (2015): Explanatory model of emotional-cognitive variables in school mathematics performance: a longitudinal study in primary school. Front. Psychol. 6:1363. doi: 10.3389/fpsyg.2015.0136

Dočkal, V., Musil, M., Palkovič, V., Miklová, M. (1987): Psychológia nadania. Bratislava, SPN.

Galton, F. (1869): Hereditary genius: An inquiry into its laws and consequences. 1st ed. London: Macmillan.

Galton, F. (1886): Regression towards mediocrity in hereditary stature. Journal of the Anthropological Institute 15: 246–63.

Galton, F. (1892): Hereditary genius: An inquiry into its laws and consequences. 2nd ed. London: Macmillan.

Gardner, H. (2018): Dimenze myšlení. Praha: Portál, 480 S. ISBN 978-80-262-1303-1.

Gardner, H. (1983): Frames of mind: The theory of multiple intelligences. New York: Basic Books.

Laznibatová, J. (2007): Nadané dieťa: jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie. 3. Ausgabe. Bratislava: Iris. 394 Seiten. ISBN 80-89018-53-X

Locke, J. (1693): Some thoughts concerning education. London: Printed for A. and J. Churchill.

Mercader, J., Miranda, A., Presentación, M. J., Siegenthaler, R., Rosel, J., F. (2018): Contributions of Motivation, Early Numeracy Skills, and Executive Functioning to Mathematical Performance. A Longitudinal Study. Front Psychol.; 8: 2375. doi: 10.3389/fpsyg.2017.02375

Peng, P., Namkung, J., Barnes, M., Sun, C. (2015): A meta-analysis of mathematics and working memory: moderating effects of working memory domain, type of mathematics skill, and sample characteristics. J. Educ. Psychol. 108, 455–473. doi: 10.1037/edu0000079

Pfeiffer, S. I. (Ed.) (2008): Handbook of giftedness in children: Psychoeducational theory, research, and best practices. New York, NY, US: Springer Science + Business Media. http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-74401-8P

Rodin, J., Langer, E. (1977): Long-Term Effects of a Control-Relevant Intervention With the Institutionalized Aged. Journal of Personality and Social Psychology [online]. vol. 35, no. 12, http://capital2.capital.edu/faculty/jfournie/documents/Rodin_Judith.pdf

Rotter, J. B. (1966): Generalized expectancies for internal versus external control of reinforcement. Psychological Monographs: General and Applied. 80: 1–28. doi:10.1037/h0092976.

Terman, L. M. (1925): Mental and Physical Traits of a Thousand Gifted Children. Genetic Studies of Genius. Volume 1, Stanford University Press, Stanford.

Spearman, C. (1927): The abilities of man: their nature and measurement. New York: Macmillan.

Tom Köcher

E Koncept modelování matematického nadání

1 Úvod

„Nadání“ je aktuálně hodně diskutované téma, a právě pedagogové se často setkávají s označením „nadaného dítěte“. Co však pojem *nadání* vlastně přesně znamená? Práce s touto tématikou není jednoduchá, protože samotný pojem *nadání* není jako teoretický konstrukt přímo viditelný či dokonce měřitelný, a je proto obtížně uchopitelný. Také studium aktuální pedagogické, psychologické a matematicko-didaktické literatury ukazuje, že pojetí *nadání* je velice různorodé, a že neexistuje žádná všeobecně platná definice tohoto pojmu. V souvislosti s tím pak také existují různé přístupy, jak tento složitý konstrukt vysvětlit na základě modelů a konceptů.

Hodláte-li se zabývat tématem matematicky nadaných žákyň a žáků, je užitečné nejprve rozebrat význam pojmu *nadání*. Z tohoto důvodu představíme v této kapitole běžné teorie z oblasti psychologie a pedagogiky a shrneme poznatky z modelování *nadání* tak, abychom mohli vytvořit jednotný základní náhled pro pochopení pojmu *nadání*.

Je přitom nutné vymezit pojmy, které jsou úzce svázány s kontextem *nadání* a často se používají v podobném kontextu – například *inteligence, výkon* a *vysoké nadání*.

Na dobrém pochopení pojmu *nadání* pak lze navázat vytvořením modelu pro *matematické nadání*.

2 Model inteligenčního kvocientu

Velmi populární je pojetí nadání formou dosažení určité hodnoty tak zvaného inteligenčního kvocientu (IQ), který lze považovat za míru inteligence určitého člověka. IQ se zjišťuje pomocí standardizovaných testů inteligence.

Pokud budeme vycházet z modelu inteligenčního kvocientu pro nadání, hovoří se o *vysokém nadání* určité osoby, pokud dosáhne v testu inteligence inteligenční

kvocient ve výši 130 nebo víc. Toto kritérium splňují 2 % obyvatelstva. Stanovení této hranice je statistická konvence.

Existují různé testy inteligence, které mohou mít odlišné zaměření. Výsledky různých testů inteligence, a tím také stanovení vysokého nadání se tak u jedné osoby mohou výrazně lišit.

V rámci přístupu k podpoře nadaných dětí orientovaném na jednotlivé osoby, který vytvořil Weigand a kol. (2014) se upozorňuje na malou nadhodnotu při rozlišování pojmů *nadání* a *vysokého nadání*, pokud dochází ke snaze vytvořit školní kulturu s podporou pro všechny, jedno zda s vysokým nadáním, průměrným nadáním či mimořádným nadáním (viz Weigand 2014, S. 44).

V tomto textu tak ustoupíme od kvantitativního rozlišování mezi *vysokým nadáním* a *nadáním* a budeme používat pouze pojem *nadání*.

Označení za vysoce nadanou může navíc při styku s příslušnou osobou skrývat i sociální problémy.

Proto je třeba ve školním kontextu zvážit výhody a nevýhody, a na základě takového posouzení rozhodnout, zda se takové testování provede.

Pokud se nadání chápe jako například u Rosta (2009) jako existence vysoké všeobecné inteligence, pak vypadá koncepce specifického matematického nadání takto:

> Četné nálezy v příslušné literatuře jasně prokazují, že matematické schopnosti a matematické výkony jsou úzce spojeny s inteligencí a jinými – i jazykovými – školními výkony […]. Pollmer […] stručně shrnuje, že „mimořádné matematické nadání“ představuje „pouze mimořádně vysoké intelektuální nadání“. (Rost 2009, s. 23)

Matematické nadání je podle tohoto pojetí součástí všeobecně vysoké inteligence. Je základem odpovídajících vynikajících školních výsledků.

Podle modelu inteligenčního kvocientu se tedy nadání staví na úroveň inteligenci – respektive tomu, co se měří pomocí testu inteligence a kvantifikuje pomocí inteligenčního kvocientu. Ten, kdo je inteligentní, je nadaný a naopak. Toto vzájemné přiřazení je však poměrně diskutabilní. Ulm (2009) v tomto smyslu poznamenává, že pokud vyjdeme ze širokého pojmu pro nadání, pak výše uvedený výklad zcela ignoruje manuální nadání. Pokud vyjdeme z Gardnera (2010), můžeme uvést například také sociálně-emocionální (interpersonální), sportovní nebo hudební nadání, které není v jednodimenzionální definici na základě IQ vůbec zohledněno.

Kromě toho přisouzení určitého nadání na základě vysoké testované inteligence reprezentovalo pouze určitý, momentální „výřez aktuálních schopností“ (Holling a kol. 1999, s. 39) testované osoby. Kromě toho je tento výřez zásadně ovlivněn chápáním inteligence případně chápáním nadání, ze kterého vycházel tvůrce testu při jeho sestavování.

Kritické mínění, že popis nadání prostřednictvím inteligence vyjadřuje pouze určitý úhel pohledu, vyjadřuje rovněž Käpnick (2013) a píše: „Omezení pojmu nadání na kognitivní schopnosti neodpovídá jeho komplexnosti, kdy se podle dnešního pojetí potenciál (nadání) dítěte vyvíjí vždy v dynamickém procesu vzájemného ovlivňování intrapersonálních a interpersonálních katalyzátorů.“ (Käpnick 2013, s. 12). Zde se navíc objevuje kritika, že redukce nadání na momentální výkon podaný během testu inteligence neodpovídá

pohledu na nadání jako na dynamický konstrukt, jako na potenciál se schopností vyvíjet se v čase. Právě v rámci školní docházky by nemělo jít pouze o podporu již rozpoznaného a diagnostikovaného potenciálu. Prostor pro svůj rozvoj by měl být věnován rovněž domnělému a ještě neprokázanému nadání (viz Weigand 2014, s. 44).

Domněnka o pojmu nadání, který ovlivňuje více faktorů, vede k dalšímu bodu diskuze. Vyjádřit stupeň specifikace vícerozměrně chápaného nadání vycházející z komplexního konstruktu závislých faktorů pomocí jediného čísla – jako je IQ – se zdá být nemožné. Weigand (2014) k tomu dále poznamenává, že nadání jako komplexní konstrukt nelze změřit (viz Weigand 2014, s. 38–39).

Dále jsou proto představeny vybrané teorie a modely, které všechny považují nadání za vícerozměrný konstrukt.

3 Mnohočetná inteligence dle Gardnera

Místo toho, aby vycházel ze všeobecné inteligence, rozšířil psycholog Howard Gardner pojem inteligence ve své teorii o „mnohočetnou inteligenci“. Vychází přitom z toho, že inteligence je komplexní, vícerozměrný konstrukt a že ji lze rozdělit do různých, mimo jiné i nekognitivních složek (viz Gardner 2013, s. 55 a další.):

- Jazyková inteligence (mj. senzibilita pro psaný a mluvený jazyk)
- Logicky abstraktní inteligence (mj. zpracování problémů s logickými vývody, rozpoznání vzorů a struktur a práce s nimi)
- Prostorová inteligence (mj. vnímání prostoru, myšlenkové operace v prostorových situacích)
- Hudební inteligence (mj. komponování hudby, hra na hudební nástroj)
- Tělesně pohybová inteligence (mj. koordinace tělesných pohybů)
- Interpersonální inteligence (mj. schopnost empatie)
- Intrapersonální inteligence (mj. vnímání vlastních pocitů a jejich přiměřené zpracování)
- Přírodovědná inteligence (mj. rozpoznání fenoménů v přírodě)
- Existenciální inteligence (vyrovnání se se základními otázkami bytí)

V jednom ze svých hlavních děl „Dimenze myšlení“ (1991) proto Gardner zjišťuje, jak již bylo naznačeno výše, do jaké míry lze změřit inteligenci pomocí jediného čísla. Píše také, že testy inteligence měří hlavně pouze první tři ze systému jeho inteligencí (viz Gardner 1991, s. 9 a další.).

„Teorie mnohočetné inteligence“ nepostrádá sporné body. Odůvodněné jsou zejména otázky týkající se dělicí čáry mezi

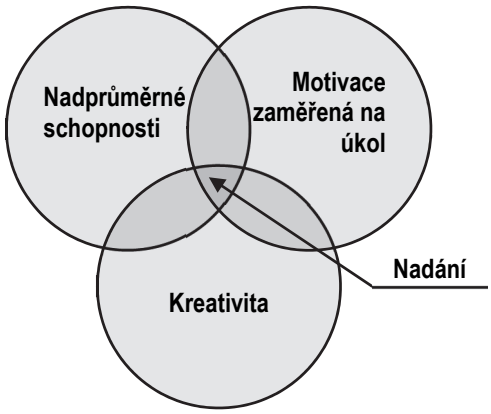
různými inteligencemi a existence dalších oblastí inteligence. Pro školy však model přesto představuje užitečnou platformu pro rozhodování; umožňuje totiž diferencované posouzení schopností a nedostatků žákyň a žáků.

Pokud jde o pojem inteligence, pak je pro školy důležitým poznatkem, že tedy jedna osoba může mít různé typy inteligence, a proto i matematické nadání může pocházet z několika těchto typů inteligence.

Ačkoli se pojmy *inteligence* a *nadání* často používají jako rovnocenné výrazy, existuje z vědeckého pohledu jasné rozlišení. *Inteligence* se obecně chápe jako pojem, který popisuje kognitivní schopnosti. *Nadání* se naproti tomu považuje za teoretický konstrukt, který popisuje individuální potenciál pro dobré či vynikající výkony v jedné nebo několika oblastech. Dále proto popisujeme modely nadání, které se pokouší znázornit základy konstruktu *nadání* a jeho vzájemného působení s dalšími faktory.

4 Modely dle Renzulliho a Mönkse

Joseph S. Renzulli vychází z toho, že pro nadání je potřeba více než pouhý vysoký inteligenční kvocient, a proto vyvinul svůj model tří kruhů (viz obr. 1), v němž se nadání posuzuje z několika úhlů pohledu (viz Renzulli 2005).



Obr. 1: Model tří kruhů podle Renzulliho

V tomto modelu, sestávajícím z několika faktorů, je popsána vzájemná závislost komponent

- kreativita,
- motivace zaměřená na úkol a
- nadprůměrné schopnosti

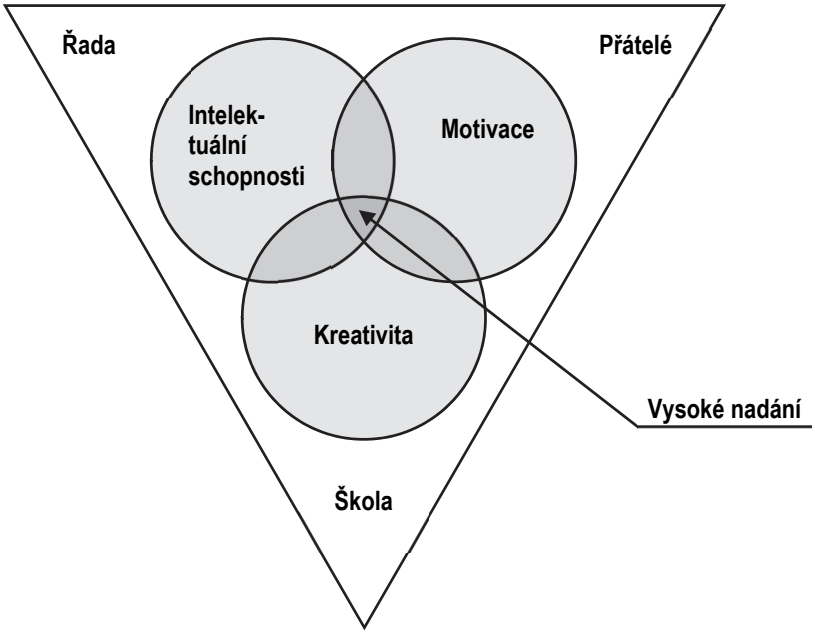
a jejich vztahy. Jako výsledek interakcí těchto nadprůměrně výrazných tří komponent se pak může vyvinout „gifted behavior“, tedy „nadané chování“. Toto chování, které Renzulli popisuje jako vysoce výkonné chování, nelze zaměňovat s vysokým nadáním v běžném smyslu slova jako permanentní, daný stav. Vysoce výkonné chování je situativní chování, které je velmi úzce spojeno s činností orientovanou na výsledek, a je tak spojeno s vysokým výkonem (viz Renzulli 2001, s. 23–24).

Pro Renzulliho je důležité přitom ukázat, že žádný z faktorů samotný nedokáže způsobit tento vysoký výkon, je to možné pouze

v souhře všech tří faktorů. Například vynikající motivace tak nedokáže kompenzovat podprůměrně vyhraněnou kreativitu.

Renzulli dále konstatuje, že děti a mladiství vykazující chování, které naznačuje nadání, potřebují mnoho možností vzdělávání, zdrojů a povzbuzení i mimo řádné vyučování. Následně tak vyvinul svůj komplexní model *Schoolwide Enrichment Model* na podporu nadaných žákyň a žáků (viz Renzulli 2005).

Triadický model vzájemné závislosti nizozemského vědce Franze Mönkse, který se zabýval výzkumem nadání (viz Mönks 1992) vychází přímo z modelu tří kruhů a rozšiřuje jej o sociální prostředí, ve kterém nadaní jedinci vyrůstají. Toto prostředí reprezentuje rodina, přátelé a škola (viz obr. 2).



Obr. 2: Triadický model vzájemné závislosti podle Mönkse

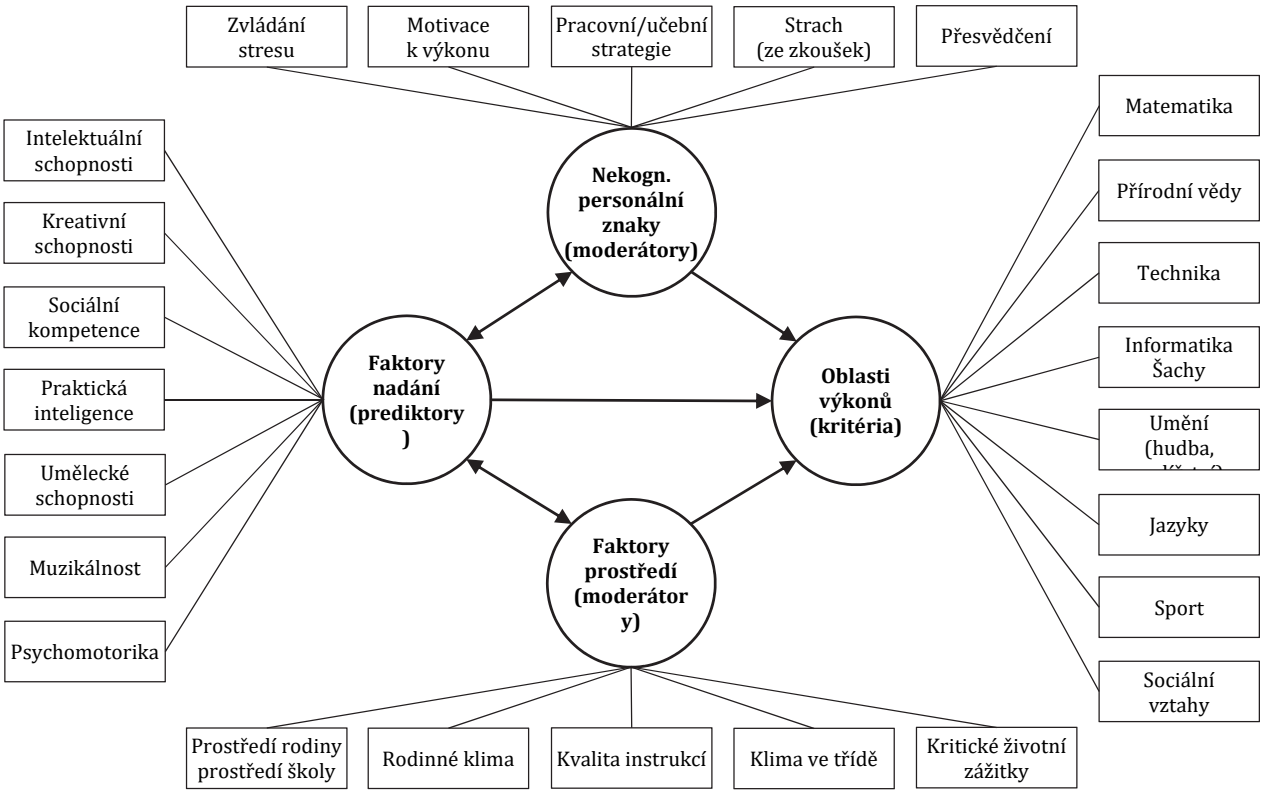
Stejně jako u Renzulliho je zde graficky pomocí stejných tří charakteristik osobnosti znázorněno, za jakých podmínek se může nadání rozvíjet. Kromě stávajících tří kruhů je však podle Mönkse zapotřebí také prostředí, které nadání podporuje. Úspěšným spolupůsobením těchto tří charakteristik osobnosti a prostředí se konečně může podařit rozvíjet nadání. Tato vzájemná závislost tří vnitřních a tří vnějších faktorů, *triád*, se označuje jako *interdependence*, neboli vzájemná závislost.

V modelu však zůstává nejasné, jak přesně vnitřní kruhy vzájemně interagují, a jak jsou vzájemně vymezeny. Navíc zůstává nejasné, v jakém vztahu jsou kruhy k vnějšímu trojúhelníku.

Souhrnně lze konstatovat, že oba modely kladou do středu jednotlivce a jeho vývoj, a že model Mönkse popisuje dynamický proces mezi podmíněnými charakteristikami osobnosti a vnějšími faktory (viz Bardy 2013, s. 19–20).

5 Model podle Hellera

Na myšlenku, že nadání podléhá komplexnímu a dynamickému procesu, navazuje rovněž psycholog Kurt A. Heller. Ten vyvinul model z obr. 3 (viz Heller 2001), ve kterém rozlišuje mezi intrapersonálními faktory nadání (na obrázku vlevo) a oblastmi výkonů (na obrázku vpravo), které jsou ovlivňovány moderačními faktory, prostředím (na obrázku dole) a nekognitivními, osobnostně podmíněnými znaky (na obrázku nahoře).



Obr. 3: Mnichovský model (vysokého) nadání Kurta Hellera

Heller se zaměřuje na charakter procesů při rozvoji nadání. Díky závislosti rozvoje nadání na různých vnějších faktorech, které působí po celý život, je zde patrný neustálý proces vývoje.

Hlavním znakem tohoto modelu je však přitom rozlišování mezi nadáním a výkonem. To, do jaké míry se faktory nadání promítají do měřitelných a viditelných výkonů, závisí jak na individuálních osobnostních charakteristikách, tak také na okolních faktorech. Proto je tento model vhodný pro znázornění toho, k jaké souhře četných faktorů a vlivů musí dojít, aby vysoké nadání přineslo také srovnatelné výkony.

Pokud to tedy shrneme: nadání samo o sobě je specifické pro určitou oblast a podléhá dynamickému vývoji, protože je po celý lidský život nutné zohledňovat specifické odborné a interdisciplinární vlivy.

Pro tvorbu modelů týkajících se nadání lze konstatovat, že na ně nesmíme pohlížet jako na dané statické fenomény. Nadání se může vyskytnout v průběhu lidského života, může se dále rozvíjet a rozrůzňovat, může však také zmizet.

Můžeme tak uzavřít:

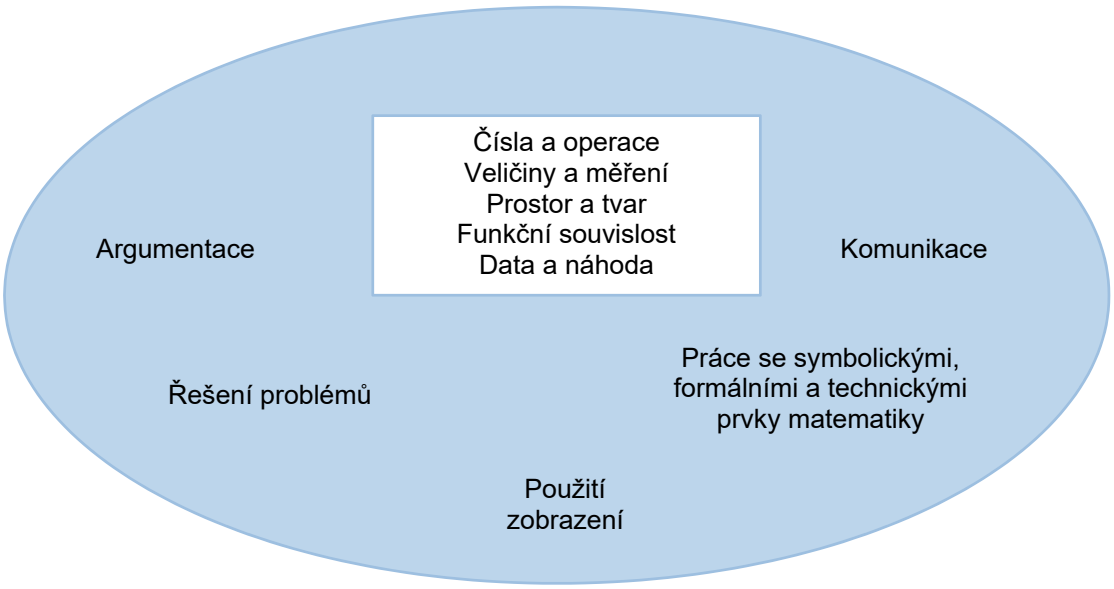
> *Nadání je v nejširším smyslu individuální potenciál pro dobré či vynikající výkony v jedné nebo několika oblastech.*

6 Specifický odborný model matematického nadání

Na základě pochopení pojmu nadání se pak můžeme zaměřit na pojem *matematické nadání*. Je možné přitom zohlednit obsahový popis pojmu *matematické kompetence* podle standardu vzdělávání konference ministrů školství (viz sekretariát Stálé konference ministrů školství) případně podle vzdělávacích plánů spolkových zemí zaměřených na kompetence (viz např. Státní institut pro kvalitu školy a výzkum vzdělávání (ISB)).

Ve strukturovaném modelu kompetencí programu LehrplanPLUS pro Bavorsko lze například vidět, jaké matematické kompetence si žákyně a žáci mají osvojit během školní docházky (viz Obr. 4). Tento model kompetencí rozděluje matematické kompetence do dvou oblastí:

- *Kompetence související s obsahem* se vztahuje na práci s matematickými obsahy v oblastech algoritmus a číslo, měření, prostor a tvar, funkční souvislost a data a náhoda.
- *Kompetence související s procesy* lze popsat prostřednictvím modelování, řešení problémů, argumentací, komunikací, používáním zobrazení a zacházením se symbolickými prvky jako typickými druhy matematických činností.



Obr. 4: Strukturovaný model kompetencí podle programu LehrplanPLUS matematika pro gymnázia

Přesnější popis, jaká matematická témata a do jaké hloubky je třeba si je osvojit, je uveden ve standardech vzdělávání KMK (viz sekretariát Stálé konference ministrů školství).

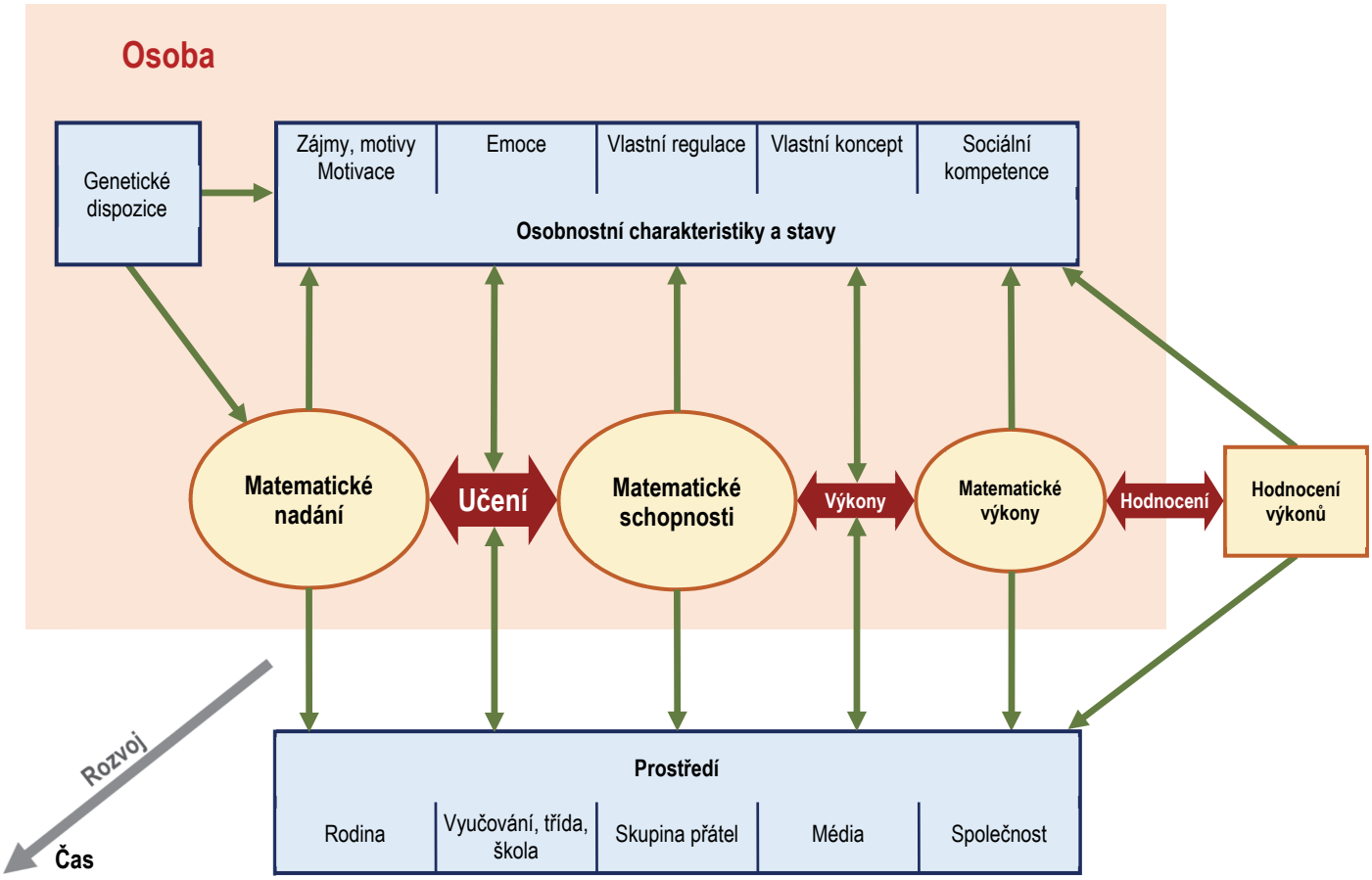
Pomocí tohoto modelu kompetencí vzniká následující návrh definice matematického nadání:

Matematické nadání je individuální potenciál pro rozvoj matematických kompetencí.

Význam pojmu *matematické nadání* se ještě zvýrazní, když si blíže prohlédneme jednotlivé aspekty navrhované definice:

- *Nadání jako potenciál:* Matematické nadání představuje potenciál. Samotná existence určitého potenciálu pro rozvoj matematických kompetencí není dostatečným faktorem pro to, že taková rozvinutá kompetence existuje, respektive stávající potenciál nemusí nutně vést k tomu, že se z něj rozvine kompetence. Důvodem může být nedostatek vhodných podnětů ze strany okolního prostředí.
- *Odborný charakter nadání*: Matematické nadání je specifický oborový konstrukt. Prostřednictvím pojmu matematických kompetencí je úzce spjat s matematikou.
- *Komplexnost nadání*: Mnohovrstevnost a hloubka matematiky se odráží v komplexnosti kompetenčního modelu vzdělávacích standardů KMK, a přenáší se tím na pojem nadání. Lze tak například rozlišovat matematické nadání v různých oblastech matematiky (jako geometrie, algebra, stochastika) nebo nadání pro matematické procesy (jako je modelování, řešení problémů, argumentace).
- *Nadání jako individuální osobní vlastnost*: Názor, že nadání se považuje za individuální, vede ke dvěma aspektům: Za prvé, že každá osoba má určitý potenciál pro rozvoj matematických kompetencí, a tím také určité nadání. Za druhé, že matematické nadání se projevuje individuálně, to znamená, že lidé mají odlišný individuální potenciál pro rozvoj matematických kompetencí. Mimořádně matematicky nadané osoby se vyznačují tím, že je tento potenciál v mnoha složkách vyjádřen výrazně nadprůměrně.

Z tohoto chápání matematického nadání vychází níže vyobrazený oborový model pro rozvoj nadání, kompetencí a výkonů podle Ulma a Zehndera (2020). V modelu na obr. 5 je komplex všech osobních vlastností (mimo matematického nadání a matematických kompetencí) a všech okolních faktorů symbolizován vždy pomocí obdélníku. Šipky představují vzájemné působení.



Obr. 5: Model rozvoje matematického nadání, kompetencí a výkonů podle Ulma a Zehndera (2020)

Učení se v tomto modelu považuje za centrální proces vývoje matematických kompetencí. Nabytí těchto kompetencí probíhá formou duševního zabývání se matematickými obsahy. Procesy učení, které přitom probíhají v hlavě příslušné osoby, pak mohou vést k (dalšímu) rozvoji matematických kompetencí. Základem tohoto učení je individuální matematické nadání – potenciál pro rozvoj kompetencí.

V tomto modelu probíhá rozvoj matematického nadání, jak již bylo naznačeno výše, současně s přirozeným biologickým, geneticky podmíněným vývojem mozku a osoby samotné. Zásadní roli však navíc hraje také individuální učení. Při rozvoji matematických kompetencí pomocí procesů učení dochází v mozku v důsledku učení ke změnám nervové soustavy, které dokáží ovlivnit a zvýšit individuální potenciál pro rozvoj kompetencí, a tím také matematického nadání. Tento existující potenciál se rovněž může v průběhu života zmenšovat, pokud nenastanou odpovídající procesy učení. Plastický příklad: Dítě respektive mladistvý může mít vysoký potenciál naučit se (cizí) jazyk, hrát na nějaký hudební nástroj nebo mít matematické myšlení. Pokud neproběhne příslušné učení, pak se tento potenciál během života snižuje.

Nadání se, stejně jako u Weiganda a kol. (2014), považuje za konstrukt, který se v průběhu života může měnit. Rozvíjí se dynamicky spolupůsobením různých vlivů.

Matematické nadání a kompetence mohou sice ne bezprostředně, ale nepřímo přes proces učení ovlivňovat všeobecné osobnostní vlastnosti a okolní prostředí. Ty jsou vzájemně spojené do komplexního předíva.

Osobnostní vlastnosti označují jednak časově relativně stabilní charakteristiky určité osoby. Sem patří například motivy, schopnost vlastní regulace, obecné zájmy, vlastní koncept a sociální kompetence. Dále obsahují časově krátkodobé variabilní stavy osoby, například aktuální motivaci pro konkrétní činnost nebo emoce, které vznikají během aktuální situace. Důsledkem četnosti těchto vlastností určité osoby je skutečnost, jakým způsobem a v jakém rozsahu se tato osoba matematikou zabývá, a jak díky tomu rozvíjí matematické kompetence a matematické nadání.

Okolní prostředí, v němž se osoba nachází, má na rozvoj matematického nadání a kompetencí formou učení rozhodující vliv. Součástí životních podmínek dětí a mladistvých jsou především rodina, škola, skupina přátel a média a naše společnost jako celek. Pokud se v tomto prostředí vyskytnou příslušné situace učení a podněty, vládnou v něm podpora a hodnoty, které zvyšují motivaci k učení, a osoba má sociální kontakty, může se to pozitivně projevit na učení matematice. Tyto faktory jsou směrodatné pro to, zda a jak intenzivně se bude dítě či mladistvý zabývat matematikou nejen ve škole, ale také mimo ni.

Nadání obecně a matematické nadání zvlášť kromě toho také v tomto modelu vychází z genetických dispozic.

Matematické výkony pak lze podávat na základě matematických kompetencí, když se tyto kompetence využijí k dosažení určitého výsledku. Výkon tedy vyplývá z využití kompetencí v rámci situace, která je spojená s matematikou, a je viditelný. Příslušné procesy výkonů jsou přitom, stejně jako procesy učení, ovlivňovány zvenčí faktory prostředí a zevnitř osobnostními vlastnostmi.

Také Friedhelm Käpnick vnímá teoretický konstrukt *matematického nadání* především ve vztahu ke školnímu věku, jako „individuálně ovlivněný potenciál pro určitý obor s nadprůměrnou matematickou výkonností, která se s velkou pravděpodobností rozvíjí v mládí a v dospělosti.“ (Käpnick a kol. 2005, s. 22).

Rovněž Käpnick posuzuje matematické nadání jako specifické pro daný obor. Jeho vývoj ovlivňují vnější vlivy a osobnostní vlastnosti. Rozlišuje přitom nadání a výkony: na základě nadání může určitá osoba podávat výkony.

Vysoký důraz na procesy učení v rámci výše uvedeného modelu pro nadání zaměřeného na matematiku, který vytvořili Ulm a Zehnder (2020) nalezneme také u Weinerta (2000): „Učení je rozhodující mechanismus při transformaci (vysokého) nadání do (vynikajících) výkonů.“ (Weinert 2000). Je tak navíc zřejmé, že vysoké nadání nemusí vždy implikovat vysoké výkony.

Další literární podklad najdete ve formě podrobnějšího posouzení tematického komplexu „Matematické nadání, kompetence, výkony“ u Ulma a Zehndera (2020).

7 Souhrn

Na závěr jsou v této publikaci ještě jednou shrnuty pojmy *inteligence, vysokého nadání, nadání* a *matematického nadání*.

Inteligence je to, co se měří pomocí testu inteligence a vyjadřuje formou inteligenčního kvocientu.

Nadání lze podle Hellera (1996) obecně charakterizovat jako „individuální, relativně stabilní a přetrvávající potenciál schopností a jednání sestávající z kognitivních, emocionálních, kreativních a motivačních součástí, které lze za pomoci určitých vlivů dále zvýrazňovat, a dostat osobu do situace,

kdy je schopná podávat mimořádné výsledky v některé více či méně úzce popsané oblasti.“ (Heller 1996, S. 12)

O *vysokém nadání* se hovoří v souvislosti s testy inteligence, označení se používá pro osoby s mimořádně vysokou inteligencí (např. IQ vyšší nebo rovno 130). Pokud jste však – stejně jako tento text – zastáncem vícevrstvého pochopení výrazu nadání, není používání pojmu *vysoké nadání* a jeho odlišování od výrazu *nadání* nutné.

Matematické nadání je individuální potenciál pro rozvoj matematických kompetencí.

Seznam literatury

Bardy, Peter (2013): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primar- und Sekundarstufe I + II).

Gardner, Howard (1991): Abschied vom IQ. Die Rahmentheorie der vielfachen Intelligenzen. Stuttgart: Klett-Cotta.

Gardner, Howard (2010): The Theory of Multiple Intelligences. http://www.pz.harvard.edu/sites/default/files/Theory%20of%20MI.pdf.

Gardner, Howard (2013): Intelligenzen. Die Vielfalt des menschlichen Geistes. Stuttgart: Klett-Cotta.

Heller, Kurt A. (1996): Begabtenförderung – (k)ein Thema in der Grundschule? *Grundschule* 28 (5), 12–14.

Heller, Kurt A. (Hg.) (2001): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter. Göttingen: Hogrefe.

Holling, Heinz; Kanning, Uwe Peter; Wittmann, Anna Julia; Preckel, Franzis (1999): Hochbegabung. Forschungsergebnisse und Fördermöglichkeiten. Göttingen: Hogrefe.

Käpnick, Friedhelm (2013): Theorieansätze zur Kennzeichnung des Konstruktes „Mathematische Begabung" im Wandel der Zeit. In: Torsten Fritzlar und Friedhelm Käpnick (Hg.): Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven. Münster: WTM Verlag, 9–40.

Käpnick, Friedhelm; Nolte, Marianne; Walther, Gerd (2005): Talente entdecken und unterstützen. Beschreibung des Mathematikmoduls G5. Kiel: IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

Mönks, Franz. J. (1992): Ein interaktionales Modell der Hochbegabung. In: Ernst A. Hany (Hg.): Begabung und Hochbegabung. Theoretische Konzepte – empirische Befunde – praktische Konsequenzen. Bern, Göttingen, Toronto, Seattle: Huber, 17–22.

Renzulli, Joseph S. (2001): Das schulische Enrichment Modell SEM. Aarau: Sauerländer.

Renzulli, Joseph S. (2005): The Three-Ring Conception of Giftedness: A Developmental Model for Promoting Creative Productivity. In: Robert J. Sternberg und Janet E. Davidson (Hg.): Conceptions of giftedness. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 246–279.

Rost, Detlef H. (2009): Grundlagen, Fragestellungen, Methode. In: Detlef H. Rost (Hg.): Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. Befunde aus dem Marburger Hochbegabtenprojekt. Münster: Waxmann (Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie, 72), 1–91.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister: Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. https://www.kmk.org

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB): LehrplanPLUS – Gymnasium – Mathematik – Fachprofile. https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/gymnasium/mathematik.

Ulm, Volker (2009): Auch Begabte brauchen Förderung – Ansätze für das Fach Mathematik. Schriftenreihe zum Kolloquium Mathematik-Didaktik. Universität Eichstätt, 100/1–100/11.

Ulm, Volker; Zehnder, Moritz (2020): Mathematische Begabung in der Sekundarstufe. Modellierung, Diagnostik, Förderung. Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

Weigand, Gabriele (2014): Begabung oder Hochbegabung? In: Gabriele Weigand, Armin Hackl, Victor Müller-Oppliger und Günter Schmid (Hg.): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz, 37–46.

Weigand, Gabriele; Hackl, Armin; Müller-Oppliger, Victor; Schmid, Günter (Hg.) (2014): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz. http://content-select.com/index.php?id=bib_view&ean=9783407293718.

Weinert, Franz Emanuel (2000): Lernen als Brücke zwischen hoher Begabung und exzellenter Leistung. 2. internationale Salzburger Konferenz zu Begabungsfragen und Begabtenförderung. Salzburg, 13.10.2000.

Michala Plassová

H Model matematického nadání

1 Úvod

Rozpoznávání potenciálů jedince je stěžejní při stanovení vhodné metody rozvíjení jejich nadání. Na úvod si musíme alespoň krátce zmínit jistý terminologický problém, který představuje vlastní vymezení termínu nadání a dále pak potažmo pojmů *talent*, *potenciál* či *vloha*. Ve 30. letech minulého století byla podle Pfeiffera (2008) odborná veřejnost silně ovlivněna prací Lewise Termana (1925), který jakožto autor Stanford-Binetova inteligenčního testu, používal právě tento test jako nástroj pro identifikaci nadaných, přičemž nadaný byl v tomto pojetí ten, kdo dosáhl více než 130 inteligenčních bodů. Avšak je vhodné zdůraznit, že Stanford-Binetův test v té době odrážel především Spearmanův (1927) tzv. „g" faktor inteligence. Taková inteligence se vnímá jako obecná, vrozená a z jisté míry dědičná. Je zde tedy patrné ochuzení o inteligenci specifickou, potažmo Cattellovu (1971) krystalickou, nemluvě o komplexních teoriích inteligence, jako je kupříkladu Gardnerova teorie mnohočetné inteligence (2018). Gardnerova teorie sice zahrnuje složky, které odpovídají faktoru „g", nicméně jsou významně rozvíjeny právě zkušeností a tréninkem. Příkladem může být inteligence interpersonální nebo existenciální.

Komplexní definici nabídl Paul Witty (1958), tu si uvedeme po krátkém představení jeho práce. Ta zhruba do 80. let minulého století dominovala odborné literatuře v oblasti nadaných jedinců. Práce Paula Wittyho a Martina D. Jenkinse (Pfeiffer, 2008) se věnovaly roli kulturního prostředí, etnicity a rasy dětí mladšího školního věku ve vztahu k jejich naměřené inteligenci. Byl to přímo Witty, od koho pochází známá definice nadaného dítěte, ve které píše, že: „*nadané nebo talentované je to dítě, které soustavně vykazuje významné výkony v jakékoli hodnotné oblasti snažení*" (1965; in Laznibatová, 2007, str. 63). Na tomto českém překladu Wittyho definice (viz předchozí) si můžeme názorně ukázat, že většina autorů vnímá pojmy „nadání" a „talent" jako synonyma. Laznibatová (2007) uvádí, že pokud je mezi těmito pojmy v literatuře rozlišováno, pak je *talent* považován za realizační úroveň *nadání*. Abychom byli důslední, pak si vezměme originál Wittyho deficine z roku 1958 (str. 62), kde se píše, že:

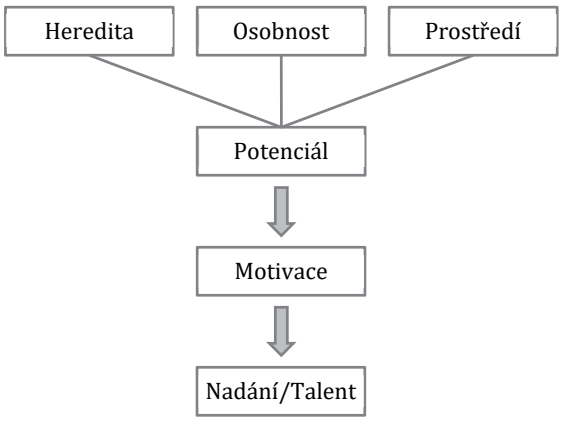
"*There are children whose outstanding* ***potentialities*** *in art, in writing, or in social*

*leadership can be recognized largely by their performance. Hence, we have recommended that the definition of **giftedness** be expanded and that we consider any child gifted whose performance in a potentially **valuable** line of human activity is consistently remarkable*[1].“

V této práci se chceme věnovat i pojmu *potenciál*, který přináší do problematiky nadaných dětí jeden z elementárních mechanismů tohoto jevu. Tím je pak nadání jako výsledek dynamického procesu, ve kterém se geneticky a dědičně podmíněné vlohy utváří a formují v prostředí, ve kterém se nadaný nachází. Prostředím pak rozumíme nejen fyzické, ale i sociální, ekonomické, psychologické a duchovní. Zajímavé je, že Witty (viz výše) dokonce významově používá slova potenciál a nadání jako synonyma. S tím z naší pozice nesouhlasíme, jelikož v českém jazykovém kontextu vnímáme nadané jedince dle Laznibatové (tamtéž) jako osoby s již zjevně manifestujícími se schopnostmi ve vybrané oblasti realizace. Nadání také nevnímáme jako dokonavý (konečný) děj, ale celoživotní proces utváření a naplňování potenciálů jedince. Jinými slovy – i člověk s potenciálem kupříkladu pro matematiku nemusí být vždy nutně v této disciplíně úspěšný. Roli hraje celá řada vnitřních i vnějších faktorů, které si představíme později. V češtině existuje krásná pověst, která říká, že nouze naučila Dalibora housti. Dalibor byl český rytíř a šlechtic, který byl zajat a dle pověsti uvězněn na Pražském hradě. Z nouze se naučil ve věži hrát na housle, aby si vyžebral jídlo od prostého lidu, který jeho hudbě naslouchal (Jirásek, 2007). V následujícím textu rozhodně nemáme v úmyslu používat podobné motivační strategie k výuce matematiky, nicméně chceme poukázat, že svou roli v rozpoznávání potenciálu jedince hraje i situace, ve které se osoba nachází. Neúspěch v matematice v rámci vzdělávání vždy nepoukazuje na absenci potenciálu. V textu si tak klademe za cíle představit i takové indikátory, které nesouvisí s formálním hodnocením výkonu v matematice, ale spíše s osobnostními rysy, způsoby myšlení nebo druhy motivace.

2 Obecný model nadání

Zvážíme-li již nastíněné základní proměnné, které do procesu formování nadání vstupují, pak můžeme navrhnout jednoduchý obecný model (viz obrázek č. 1).



Obr. 1: Obecný model nadání

Při stanovování těchto proměnných jsme se řídili především současnou literaturou (např. Pfeiffer, 2008; Gardner, 2018). Nicméně bychom naši rešerši mohli začít již v období starověkého Řecka, jelikož koncept individuálních rozdílů můžeme najít kupříkladu v práci Plata (Anatasi, 1958) a pak u další řady autorů, jež se podíleli na široké škále předvědeckého uchopení nadání a lidského potenciálu (např. Locke, 1692; Galton, 1869; Galton, 1886; Galton 1892). Z vědeckých prací nás ovlivňují i klasické

[1] Do češtiny můžeme volně přeložit, jako *Jsou děti, jejichž výjimečný potenciál v umění, literatuře nebo ve schopnosti vést ostatní je natolik výrazný, že tento potenciál můžeme stabilně pozorovat v jejich výkonech. Z tohoto důvodu doporučujeme rozšířit definici nadání a za nadané dítě můžeme považovat každé dítě, které v lidském kontaktu vykazuje stabilně výjimečný potenciál.*

studie z minulého století (např. Horst, 1941; Bennett, Seashore, & Wesman, 1952; Cronbach, 1957; Becker, 1970; Dočkal, 1987). Ze současných prací poté pracujeme především s těmi, které se věnují nadání v oblasti matematiky (např. Dehaene, Molko, Cohen, et al., 2004; Geary, 2004; Vinkhuyzen, et al., 2009; Baron-Cohen, et al., 2014; Davis, et al., 2015).

Kupříkladu Singerová (et al., 2016) ve své studii poukazuje na význam **kreativity** nebo dokonce **smyslu pro humor**. Jednotlivých indikátorů nadání je celá řada. Námi navržený model je schématický a značně zjednodušený a má sloužit spíše pro základní orientaci. Rozšířený a komplexnější model poskytujeme v následující kapitole. Než se k němu dostaneme, upřesněme si vztahy mezi výše uvedenými proměnnými. **Heredita**, **osobnost** i **prostředí** se vzájemně prolínají a nelze je chápat jako oddělené jevy. Kupříkladu obecná inteligence je významně *hereditárně* (dědičně) ovlivněný *osobnostní* rys. Nicméně se tento rys nemusí v rámci ontogeneze projevit, nejsou-li mu zajištěné vhodné podmínky (*prostředí*). S takovým jevem se setkáváme u dětí se syndromem deprivace nebo dnes již tedy spíše pseudodeprivace.

Zásadní proměnnou je pak motivace k tomu potenciál formovat v nadání. Zaměříme-li se na motivaci ve škole, musíme zmínit studii HonKa a Aqui (2013), kteří zkoumali skladbu motivace u středoškolských studentů, kteří byli nadaní v matematice. Ta se dle autorů sestává především z konceptu self efficacy a výkonu. Self efficacy lze definovat jako důvěru ve vlastní schopnosti. Jde o termín z teorie Alberta Bandury (1997) a na jeho vývoji se podílí celá řada faktorů od podporující výchovy rodičů přes pozitivní školní i třídní klima. Například Bates, Lathamová a Kim (2011) poukazují na vliv sebedůvěry učitelů ve vlastní schopnost vyučovat matematiku a následného efektu na studenty. Autoři uvádí, že výkon studenta je výrazně ovlivněn pedagogickými kompetencemi učitele. Ve studii uvádí, že samotná self efficacy učitele má vliv na self efficacy studenta.

Projděme si nyní jednotlivé položky obecného modelu a přidejme specifika pro oblast matematiky.

3 Matematický model nadání

V roce 1980 vydal Národní koncil učitelů matematiky (NCTM) ve Spojených státech prohlášení, ve kterém uvedl, že potenciál pro matematické nadání je jeden z nejvýznamnějších společenských zdrojů, který je nezbytně nutný pro udržení technologického pokroku. Nicméně se aktuálně po celém světě potýkáme se signifikantním úpadkem v matematickém výkonu (OECD, 2016). Hodí se i zmínit, že aktuálně neexistuje žádná jednotná definice matematického nadání. Co vůbec matematické nadání je, se definuje různými způsoby. Singerová (et al., 2016) poskytuje stručný průřez základními přístupy, kdy uvádí, že Renzulli (1986) kupříkladu hovoří o třech základních složkách matematického nadání: nadprůměrný výkon, kreativita a trpělivost. Gagné (2003) se zaměřuje na osobnostní složky včetně temperamentu a motivace. Harrison (2003) zdůrazňuje u nadaných dětí především rozdíly v kognitivní, sociální a emocionální oblasti. Konkrétně pak nadprůměrnou rychlost učení se novým věcem, výbornou paměť, silnou koncentraci, schopnost porozumět komplexním konceptům, dobrou schopnost behaviorálního pozorování. Velmi zajímavý faktor matematického nadání podle autora představuje i smysl pro humor.

Nicméně je nutné uvést práci Walshové (et al., 2012), která provedla metaanalýzu studií v tomto tématu a vyvodila, že valná většina konceptuálních modelů je založena spíše na dobré víře, nežli na empiricky zkoumatelných datech. Takzvaný evidence-based, neboli na evidenci založený, přístup dle autorky představuje velmi náročnou výzvu. Vystává tak otázka, zdali konceptuální modely vůbec formulovat nebo se spíše zaměřovat na dobře formulovatelné a měřitelné faktory. V současné odborné literatuře se prediktivní hodnotě různých faktorů či proměnných v oblasti matematického nadání věnuje kupříkladu Peng a Lin (2019); Chow, Ekholm (2019); Gladstone (et al, 2018); Morosanova (et al., 2016); Mercaderová (2018), Gimbert (et al., 2019). Z našeho pohledu představuje významnou práci v této oblasti právě Peng a Lin (2019), kteří pomocí metaanalýzy 110 studií zkoumali korelaci mezi výkonem v matematice a pracovní pamětí a našli středně významnou korelaci o velikosti r=35,95% a o intervalu spolehlivosti [0,32; 0,37]. Z další analýzy bylo poukázáno na srovnatelnou asociaci mezi verbální pracovní pamětí, numerickou pracovní pamětí a vizuálně prostorovou (vizuo – spaciální) pracovní pamětí. Vrátíme-li se k našemu obecnému modelu, pak zastáváme názor, že konceptuální modely je třeba stavět na kvantifikovatelných a měřitelných faktorech, na druhou stranu je důležitý i kontext jednotlivých faktorů ve vztahu k psychologii a pedagogice. Bez komplexního pochopení zdrojů utváření, dynamiky a mechanismu funkce nepřináší strohé empiricky testovatelné faktory jasně srozumitelné využití do běžné pedagogické praxe.

Vysvětleme si nyní jednotlivé širší pojmy a to, co zahrnují v kontextu nadaných dětí v matematice.

Heredita

Hereditou rozumíme dědičnost nebo lépe řečeno vliv dědičnosti na matematické nadání. Heredita podle Warriera a Baron – Cohena (2016) koreluje s matematickým nadáním (MN) v rozmezí 0.2 až 0.9, což je samozřejmě příliš vágní údaj, avšak konkrétní číslo se liší studii od studie. Kupříkladu Cerda (et al., 2015) na vzorku (n = 634) čilských dětí na základní škole provedl Brzký numerační test (Early Numeracy Test) a následně vzorek sledoval po dobu čtyř let. Zjistil, že prediktivní hodnota zmíněného testu dosahuje zhruba 64%. Tento test je založený, jak už název napovídá, na numerozitě. Numerozita je evolučně vyvinutý mechanismus, se kterým se setkáváme již u kojenců (např. Starkey & Cooper, 1980; Feigenson et al., 2004; Izard et al., 2009) a umožňuje nám rudimentální aritmetické početní operace (Plassová, 2017). Nicméně i v testu Brzkých numeračních schopností narážíme na starý problém **nature vs. nurture**[2]. Zejména když vezmeme v potaz všechny proměnné, které v tomto testu mají vliv na konečný výsledek. Přímo touto problematikou se zabývá Mercaderová (et al., 2018; viz níže) a navazuje na již v textu uvedený problém rozvoje potenciálu ve vhodném prostředí.

Jednou ze složek heredity, kterou je potřeba zmínit, je pohlaví. Tomu byla věnována pozornost v mnoha studiích (např. Haworth et al., 2007; Markowitz et al., 2005; Vinkhuyzen et al., 2009 Lindberg et al., 2010; Stoet and Geary, 2013; Cerda et al., 2014). Warrier a Baron – Cohen (2016) uvádí, že ačkoli historicky bylo spojováno nadání v matematice s mužským pohlavím, moderní molekulární genetické studie nepřikládají vlivu pohlaví velký význam. Spíše vyzdvihují sociologické faktory.

[2] V překladu *příroda vs. výchova*

Exekutivní funkce

Exekutivní funkce v našem modelu řadíme mezi složku, kterou tvoří průnik heredity, osobnosti, prostředí a motivace. Mercaderová (et al., 2018) zdůrazňuje nutnost multifaktorového přístupu a zahrnutí zejména tří proměnných - *brzkých numeračních schopností, exekutivních funkcí* a *motivace*. Numerační schopnosti jsme již krátce shrnuli, podívejme se tak na *exekutivní funkce*. Jimi rozumíme funkce řídící, které regulují kognitivní (rozumové) funkce během řešení úloh. Těchto funkcí je samozřejmě celá řada, nicméně existují dvě, které jsou považovány za nejvýznamnější (Diamond, 2013) z hlediska jejich vlivu na matematické nadání. Jsou to *pracovní paměť* a *inhibice*.

Mercaderová (tamtéž) uvádí, že inhibice ukázala signifikantní vliv na matematické nadání během brzkých stádií vývoje dětí, ale výsledky nejsou vždy stabilní a existují i studie (např. Censabella and Noël, 2008), jež tento vztah nepotvrzují. Dle našeho názoru existují významné rozdíly v tom, jaký konstrukt inhibice studie používají (např. Censabella & Noël, 2004; Friedman & Miyake, 2004; Blair and Razza, 2007; Bull et al., 2008; Lan et al., 2011). Je potřeba brát v potaz, že zmíněné studie nepracují s inhibicí na poli neurální sítě a testy jsou prováděny pouze behaviorálně. Pengova (et al., 2015) metaanalýza pak ukázala korelaci mezi MN a pracovní pamětí, což jsme již uvedli v předchozím textu. Na tomto místě se však hodí rozšířit, že testovány nebyly pouze různé matematické domény (vizuálně prostorová pracovní paměť, numerická pracovní paměť a podobně), ale testovány byly i různé matematické schopnosti. Kupříkladu znalost čísel, počítání s celými čísly, počítání s jednocifernými nebo dvoucifernými čísly, zlomky, slovní úlohy, geometrie nebo algebra. Nejvíce korelovaly s pracovní pamětí slovní úlohy a sčítání jednociferných čísel (rs= 0,37 a 0,35). Méně pak korelovala geometrie. Lze tak vyvodit, že úlohy, ve kterých by děti v mladším školním věku měly projevovat matematické nadání, by měly mít tuto podobu. Zároveň není k odhalení potenciálu jedince důležitá pouze správnost odpovědí, ale také rychlost zpracování těchto úloh. Zajímavou studii uvedli Merain a Shahar (2018), kteří tvrdí, že reakční čas a pracovní paměť spolu významně korelují. Co nás zaujalo je pak zjištění autorů, že výrazně pomalé reakční časy korelují s nízkou inteligencí ještě lépe než rychlé reakční časy s vysokou inteligencí. Na druhou stranu rychlost reakčních časů může být ovlivněna nejen dynamikou pracovní paměti, ale emocionálními a sociálními faktory, které blíže rozvádíme v následující části.

Emocionální a sociální faktory

Dle Singerové (et al., 2016) patří mezi velmi problematické faktory asynchronní vývoj, problémy v socializaci a problémy s učením sebe sama. Asynchronním vývojem se má na mysli rozdílná rychlost vývoje v intelektové, emoční, sociální, ale i fyzické rovině. Nerovnoměrný vývoj zároveň navazuje na problémy v socializaci, kterým může nadané dítě čelit. Vysoce nadaní jedinci se mohou cítit odlišní od svých vrstevníků, což jim znesnadňuje zařazení do sociálních skupin. Nadto i okolí dítěte vnímá výjimečně nadané jedince jako odlišné, což se může transformovat v negativní reakce, vyčlenění, ale dokonce i v šikanu. Schneider (1987) našel negativní korelaci mezi inteligencí a interpersonálními vztahy s vrstevníky. Dalším problematickým faktorem je učení se ve školním prostředí. Singerová (tamtéž) poukazuje na tendenci nadaných dětí preferovat samostudium a dělání věcí vlastním způsobem. Grossová (1993) ve své studii zjistila, že kupříkladu práce ve skupině je pro nadaného jedince nezábavná, pokud dítě tvoří skupinu s vrstevníky. Naopak však

nadané děti vnímají práci ve skupině jako obohacující a zábavnou, jsou-li skupiny tvořeny s rovnocennými partnery. Autorka doporučuje ve vzdělávání nadaných dětí umožňovat přeskakovat ročníky, aby se nadané děti neřadily do vzdělávacích skupin podle věku, ale podle svých schopností.

Motivace

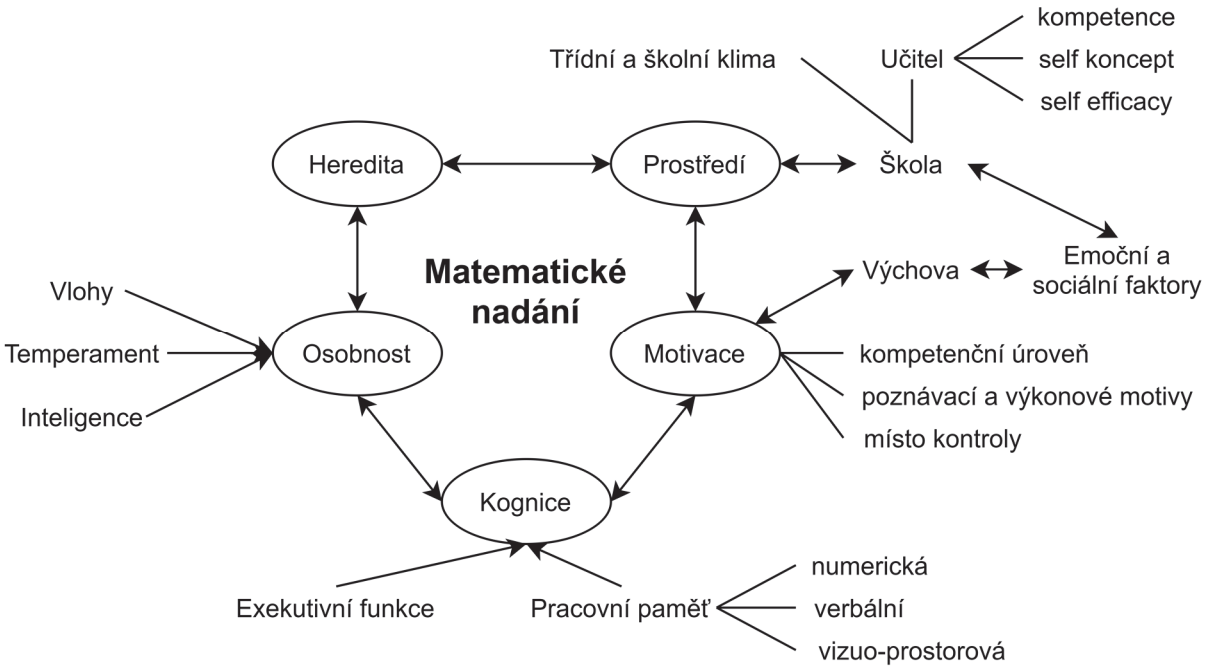
Dle Mercaderové (et al., 2018) je stěžejním motivačním faktorem kompetenční úroveň, kterou o sobě jedinec má, a to v tom smyslu, že lidé, jež věří ve svůj úspěch, vynakládají větší píli a úsilí a jsou vytrvalejší, než lidé, kteří své kompetence vnímají jako podprůměrné. To ve své podstatě popisoval již Julian B. Rotter ve své teorii *místa kontroly* (locus of control, LOC) (1966), když rozdělil tzv. atribuční styly na internalismus a externalismus. Kdy internalisté pro vysvětlení událostí hledají vnitřní příčiny a domnívají se, že jejich úspěch je metaforicky v jejich rukou. Externalisté potom příčiny úspěchu a neúspěchu připisují vnějším příčinám a obecně jim chybí pocit kontroly nad vlastním životem. V již klasické studii Rodina a Langera (1977) byl internalismus označen jako výhodnější atribuční postoj, jelikož internalisté bývají zdravější, spokojenější a úspěšnější.

Leikinová (et al., 2017) uvádí, že jedním z nejtypičtějších rysů matematicky nadaných jedinců je intrinsická (vnitřní) motivace. Podle Ryana a Deciho (2000) a jejich sebedeterminační teorie potřebují jedinci s potenciálem pro rozvinutí nadání především intenci, perzistenci, vedení a výdrž. Zároveň je potřeba poskytnou stabilitu, psychosociální podporu a uspokojit jedincovy poznávací potřeby optimálně náročnými úlohami.

Závěr

Shrneme-li tyto poznatky graficky, poté dostaneme základní model matematického nadání (viz obrázek č. 2).

Jeho položky je potřeba vnímat v jejich komplexnosti a nastíněné vztahy jsou spíše ilustrativní a nereflektují skutečnou váhu jednotlivých položek. Kupříkladu i dítě s mírně neglektivní výchovou může v přítomnosti schopného učitele manifestovat matematické nadání. Zvýrazněné části představují základní koncepty, se kterými se musíme v této oblasti seznámit. Nejvýznamnějším vztahem stále zůstává heredita a prostředí. Nicméně mezi identifikátory potenciálu pro matematické nadání může patřit již zmíněný smysl pro humor, zvědavost, případná sociální neobratnost v mladším školním věku nebo kreativita myšlení. Mezi spolehlivé faktory, jak potenciál objevit, řadíme úlohy využívající různé složky kognitivních funkcí, avšak nejslibnějším indikátorem se jeví pracovní paměť. V rámci uvedených výzkumů se ukazují jako relativně spolehlivou metodou rozlišování potenciálu pro matematiku slovní úlohy a jiné úlohy vyžadující kreativní nebo neobvyklé řešení.



Obr. 2 Model matematického nadání

Literatura

Anastasi, A. (1958). Differential psychology: Individual and group differences in behavior. New York: Macmillan, 3.

Bandura, A. (1997). Self-efficacy: The exercise of control. New York: Freeman.

Baron-Cohen S., Murphy L, Chakrabarti B, et al. (2014). A genome wide association study of mathematical ability reveals an association at chromosome 3q29, a locus associated with autism and learning difficulties: a preliminary study. PloS One 9 (5).

Bates, A., Lathampvá, N., Kim, A. (2011). Linking Preservice Teachers' Mathematics Self-Efficacy and Mathematics Teaching Efficacy to Their Mathematical Performance. School Science & Mathematics, 111, 7, 325-333.

Becker, J. P. (1970). Research in mathematics education: The role of theory and of aptitude-treatment-interaction. Journal for Research in Mathematics Education, 1, 19-28.

Bennett, G. K., Seashore, H. G., Wesman, A. G. (1952). A manual for the Differential Aptitude Tests. New York: The Psychological Corp.

Cattell, R. (1971). Abilities: their structure, growth, and action. (xxii, 583 p.) Boston: Houghton Mifflin.

Censabella, S., Noël, M. P. (2008): The inhibition capacities of children with mathematical disabilities. Child Neuropsychol. 14, 1–20.

Cerda, G., Pérez, C., Navarro, J. I., Aguilar, M., Casas, J. A., Aragón, E. (2015). Explanatory model of emotional-cognitive variables in school mathematics performance: a longitudinal study in primary school. Front. Psychol. 6.

Dočkal, V., Musil, M., Palkovič, V., Miklová, M. (1987). Psychológia nadania. Bratislava, SPN.

Galton, F. (1869). Hereditary genius: An inquiry into its laws and consequences. 1st ed. London: Macmillan.

Galton, F. (1886). Regression towards mediocrity in hereditary stature. Journal of the Anthropological Institute 15: 246–63.

Galton, F. (1892). Hereditary genius: An inquiry into its laws and consequences. 2nd ed. London: Macmillan.

Gardner, H. (2018). Dimenze myšlení. Praha: Portál.

Gardner, H. (1983). Frames of mind: The theory of multiple intelligences. New York: Basic Books.

Grossová, M. U. M. (1993). Exceptionally gifted children. London: Routledge.

Honk, E., Aqui, Y. (2004). Cognitive and Motivational Characteristics of Adolescents Gifted in Mathematics: Comparisons Among Students With Different Types of Giftedness. Gifted Child Quarterly 48(3):191-201.

Laznibatová, J. (2007). Nadané dieťa: jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie. 3. Ausgabe. Bratislava: Iris. 394 Seiten.

Leikinová R., Leikin M., Paz-Baruch N., Waisman I., Lev M. (2017). On the four types of characteristics of super mathematically gifted students. High Ability Stud. 28 107–125.

Locke, J. (1693). Some thoughts concerning education. London: Printed for A. and J. Churchill.

Meiran, N., Shahar, N. (2018). Working memory involvement in reaction time and its contribution to fluid intelligence: An examination of individual differences in reaction-time distribution. Intelligence, 69, Pages 176-185.

Mercader, J., Miranda, A., Presentación, M. J., Siegenthaler, R., Rosel, J., F. (2018). Contributions of Motivation, Early Numeracy Skills, and Executive Functioning to Mathematical Performance. A Longitudinal Study. Front Psychol.; 8: 2375.

Peng, P., Namkung, J., Barnes, M., Sun, C. (2015). A meta-analysis of mathematics and working memory: moderating effects of working memory domain, type of mathematics skill, and sample characteristics. J. Educ. Psychol. 108, 455–473.

Pfeiffer, S. I. (Ed.) (2008). Handbook of giftedness in children: Psychoeducational theory, research, and best practices. New York, NY, US: Springer Science + Business Media.

Renzulli, J. S. (1986). The three-ring conception of giftedness: A developmental model for creative productivity. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), Conceptions of giftedness, 53–92. Cambridge, UK: Cambridge UP.

Rodin, J., Langer, E. (1977). Long-Term Effects of a Control-Relevant Intervention With the Institutionalized Aged. Journal of Personality and Social Psychology [online], 35, 12.

Rotter, J. B. (1966). Generalized expectancies for internal versus external control of reinforcement. Psychological Monographs: General and Applied. 80: 1–28.

Ryan R. M., Deci E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. Am. Psychol. 55 68–78.

Terman, L. M. (1925). Mental and Physical Traits of a Thousand Gifted Children. Genetic Studies of Genius. Volume 1, Stanford University Press, Stanford.

Schneider, B. (1987). Child Study Centre, School of Psychology University of Ottawa. Ottawa, Canada.

Spearman, C. (1927). The abilities of man: their nature and measurement. New York: Macmillan.